MATEMÁTICA BÁSICA PARA FINANCIERAS

Este material está elaborado con el propósito de repasar las matemáticas básicas, imprescindible para el estudio exitoso de Matemática Financiera.
A lo largo y ancho de este material, haremos un repaso de los siguientes tópicos:
porcentaje, ecuaciones, logaritmos, progresiones, y sus correspondientes aplicaciones.

PORCENTAJE (%)

Con el término porcentaje o tanto por ciento se conoce la proporcionalidad que se establece en relación con cada 100 unidades.
Consiste en relacionar una cantidad con respecto a 100 y se expresa con el símbolo %.
Cualquier número expresado en forma decimal puede ser escrito como porcentaje, colocando, el el punto decimal 2 lugares a la derecha y agregando el símbolo %.

Entonces: 5% significa 5 unidades de cada 100. Se expresa $\frac{5}{100} = 0,05$

50% significa 50 unidades de cada 100
0, 5% significa tomar 0, 5 unidades de cada 100
$5/100 = 0,05 = 5\%;\ 50/100 = 0,5 = 50\%;\ (0,05)/100 = 0,0005 = 0,5\%$
El 100% de una cantidad es la misma cantidad, pues se toma su totalidad.
Es decir, el 100% de 50 es 50.
Existe también el tanto por ciento fraccionario utilizado, con frecuencia, en las tasas de interés.
Veamos:

$3\ 3/8\% = 3,375\% = 0,03375$ $\qquad$ $1\ 5/8\% = 1,625\% = 0,01625$

$10\ 1/4\% = 10,25\% = 0,1025$ $\qquad$ $11\ 7/8\% = 11,875\% = 0,11875$

$9\ 5/16\% = 9,3125\% = 0,093125$

¿CÓMO CALCULAR PORCENTAJES?

Se estudiarán los 2 procedimientos más utilizados:

1) **Dado un porcentaje respecto de una cantidad, se trata de encontrar el valor resultante. Se utili za la regla de 3 simple o se multiplica directamente la cantidad por el porcentaje, expresado en forma decimal. Así, el 10% de 900 por regla de 3 simple, será:**

900-------100%

x----------10%: $x = \frac{(900)(10)}{100} = 90.$ $\quad$ **Directamente:** $900(0,10) = 90$

2) **Dada la cantidad resultante, ahora es necesario encontrar el porcentaje respecto de una canti dad. En este caso también se utiliza la regla de 3 simple, o se divide la cantidad entre la resultante multiplicada por 100, como podemos apreciar a continuación:**

¿Qué porcentaje de 500 es 60?

a) $500 - - - - 100\%$

$60 - - - - x\ \%$

$$x = \frac{(60)(100)}{500} = 1,2\%$$

¿De qué cantidad es 60 el 12%?

b) $60 - - - 12\%$

$x - - - 100\%$

$$x = \frac{(60)(100)}{12} = 500$$

APLICACIONES DEL PORCENTAJE

Las aplicaciones más comunes del porcentaje se dan en los siguientes casos: descuento por compra al contado, descuento por compra al contado con aplicación de impuestos, cálculo de porcentaje del precio de costo y cálculo del porcentaje sobre el precio de venta.

Descuento por compra al contado

Si queremos calcular el valor de la factura de venta de una cocina cuyo precio de lista es de $350, sobre el cual se está ofreciendo el 12% de descuento por venta al contado, llevamos a cabo el siguiente procedimiento:

Primero:

$ 350	precio de lista
-42	12% descuento (350)(0,12)
$ 308	valor de la factura

Segundo: $\$\ 350(1-0,12)=\$308$

Descuento por compra al contado con aplicación de impuestos.

Para calcular el valor de la factura de venta de una nevera cuyo precio de lista es de $ 480, sobre el cual se ofrece el 15% de descuento por compra al contado y, además, se le debe aplicar el 10% de impuesto a las ventas (IVA), el procedimiento es el siguiente:

Primero:

$480	precio de lista
-72	15% descuento (480)(0,15)
$408	precio con descuento
+40,80	10% IVA (408)(0,10)
$448,80	

Segundo: $480(1-0,15)=\$\ 408 : 408(1+0,10)=\$\ 448,80$

Cálculo del porcentaje del precio de costo

Si un comerciante desea calcular el precio de venta de un producto, cuyo precio de costo es de $ 25 y del cual desea obtener un beneficio del 20%, debe realizar el siguiente procedimiento:

1º: Precio de venta=Precio de costo+Utilidad

Precio de venta=25+25(0,20)

Precio de venta=25+5: Precio de venta=$30

2º: Precio de venta=25(1+0,20)=$30

Ahora para expresar la utilidad (U) hallada en el problema anterior, como porcentaje del precio de costo (PC) y del precio de venta (PV), tenemos:

Porcentaje sobre el PC:

$$25 ----100\%$$

$$5 ----x\% : x=\frac{(5)(100)}{25}=20\%$$

Porcentaje sobre el PV:

$$30 ----100\%$$

$$5 ----x\% : x=\frac{(5)(100)}{30}=16,67\%$$

Cálculo del porcentaje sobre el precio de venta

Con frecuencia, los comerciantes utilizan este procedimiento para calcular el PV al cliente.
Por ejemplo, si se quiere calcular el precio de un par de zapatos que tiene un costo de \$12 y se busca una utilidad del 25% sobre el precio de venta, se realiza el siguiente procedimiento:

$$\mathbf{PV = PC + U; PV - U = PC; PV - 0,25PV = 1200;\ PV(1 - 0,25) = 1200}$$

$$\mathbf{PV(0,75) = 12: PV = \frac{12}{0,75} = \$1600; U = PV - PC = 1600 - 1200 = \$400}$$

EJERCICIOS

1) RESOLVER

a) 3% de 200: 600
b) $7\frac{1}{2}\%$ de 800: 6000
c) $8\frac{1}{8}$ de 1000: 8125
d) $6\frac{1}{16}\%$ de 20000: $1212,50$
e) $15\frac{1}{4}\%$ de 25000: 3.05000
f) $25\frac{1}{3}\%$ de 90000: 22800
g) 300% de 3000: 9000
h) $41\frac{1}{4}\%$ de 5.000: 2.06250
i) $0,25\frac{1}{8}\%$ de 10000: 3750
j) $0,05\%$ de 3000000: 15000

2) ¿QUÉ PORCENTAJE DE

a) 1000 es 250?: 25%
b) 10000 es 85?: $0,85\%$
c) 40 es $0,50$?: $1,25\%$
d) 4000000 es 500?: $0,0125\%$
e) $0,90$ es $0,0045$?: $0,50\%$
f) $1,75$ es $0,4375$?: 25%

3) ¿DE QUÉ CANTIDAD ES

a) 8 el 25%?: 32
b) $0,54$ el 12%?: 45
c) $217,50$ el $7\frac{1}{4}\%$?: 3000
d) $3712,50$ el $4\frac{1}{8}\%$?: 90000
e) 44 el $3\frac{1}{8}\%$?: 1408
f) 2450 el $0,05\%$?: 4900000

4) Una empresa ofrece a la venta neveras cuyo precio de lista es de \$600, con descuento del 20% por venta al contado y con el 12% de IVA. Calcule los siguientes ítems:
a) el valor de la factura a pagar: $537,6$
b) el descuento efectivo: 6240
c) el porcentaje efectivo que beneficia al cliente: $10,40\%$

5) Una distribuidora comercial ofrece cocinas en promoción cuyo precio de lista es \$ 450, con un descuento del 15⅛% por venta al contado, y aplica el 12% de IVA sobre el precio con descuento. Calcule:
a) el valor de la factura a pagar: $427,77$
b) el descuento efectivo y el porcentaje real que se aplica al cliente: $22,23; 4,94\%$

6) Un comerciante compra mercancía por un valor de \$ 25000 y la vende en \$ 30000. Calcule los siguientes ítems:
a) la utilidad: 5000
b) el porcentaje de ésta en relación con el precio de costo: 20%
c) el porcentaje en relación con el precio de venta: $16,67\%$

7) Una empresa compra 30 millones de barriles de petróleo a \$45 el barril y los puede vender con las siguientes opciones:

a) con una U del 11% del PC, calcular el PV: $49,95
b) con una U del 10% del PV, calcular el PV: $50
c) ¿cuál opción le produce mayor U?: La opción b)
8)Una empresa distribuidora de gas compra este producto a $0,85/ kilogramo y lo vende con U del 25% del PC. Calcule: a) PV del kilogramo de gas: $1,06 b) U: $0,38
9) Una distribuidora de gasolina compra el producto a $1,50/galón y lo vende con una U del 20% del PV. Calcule: a)PV: $1,88 b)U: $0,38
ACTIVIDADES
1. Halle el 25% de 2000: 500
2. ¿De qué cantidad es 900 el 30%?: 3000
3. ¿Qué porcentaje de 8000 es 50?: 0,625%
4. Un comerciante compra libros a $25 y desea venderlos con una U del 35% del PC.
Calcule el PV: $PV = PC + U$: $PV = 25 + (0,35)(25)$: $PV = \$33,75$.

[redacted]

LOGARITMOS

De los logaritmos se estudiará la parte que tiene aplicación en la resolución de problemas de matemáticas financieras y, de ella, sólo se analizarán aquellos que no pueden resolverse directamente y requieren explicación, aunque se utilicen, para tal fin, calculadoras electrónicas de bolsillo.
Abordamos el tema de los logaritmos de este modo, en razón de la disponibilidad actual de calculadoras y lo extendido de su utilización. Se presupone, del mismo modo, el conocimiento de los conceptos básicos por parte del lector.

Cálculo de n y de i. **Así, el cálculo de $(1+i)^n$ –que contiene 2 variables i y n-exige la aplicación de logaritmos, puesto que, de otra manera, puede ser difícil obtenerlo. Más adelante, se estudiará que la variable i significa la tasa de interés y n el número de períodos. Es importante saber cuándo aplicar los logaritmos y cuándo utilizar las calculadoras electrónicas.**
Dentro de la metodología de los logaritmos es bueno explicar la esencia de sus elementos, así:
El logaritmo en base b de un número positivo N ($\log_b N$) es el exponente L, tal que $b^L = N$

Todo logaritmo tiene una parte entera, llamada característica y una parte decimal llamada mantisa. Entonces, tenemos:
El logaritmo de 100 en base 10 es igual a 2:$\log_{10}100=2$, porque $10^2=100$
El logaritmo de 32 en el sistema de base 2 es 5:$\log_2 32=5$, porque $2^5=32$

Logaritmo en base 10
Log 225=2,352183, en el que 2 es la característica y 0,352183, la mantisa.
Usaremos los logaritmos vulgares o de base 10, aun cuando se usan igualmente logaritmos neperianos Ln o de base e.

Una vez analizados los ejemplos anteriores, veamos algunos conceptos elementales que son nece sarios tener presente:

Logaritmo de un producto: $\log(AB) = \log A + \log B$
Logaritmo de un cociente: $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$
Logaritmo de una potencia: $\log A^n = n\log A$
Cologaritmo(colog) de un número es igual al logaritmo de su recíproco

Se utiliza para calcular el logaritmo de un número decimal menor que 1, cuando el signo menos el signo menos aparece delante de un logaritmo.
Calculemos i: $(1+i)^{18} = 3,379932.$ **Se aplican logaritmos a los dos miembros**:
$\log(1+i)^{18} = \log 3,379932$:
El logaritmo de la potencia de una cantidad es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad:
$18\log(1+i) = \log 3,379932 : \log(1+i) = \frac{\log 3,379932}{18} : \log(1+i) = \frac{0,528907962}{18}$:
$\log(1+i) = 0,0293837 : (1+i) = \text{antilog}\, 0,0293837$
Se obtiene el antilogaritmo para encontrar el número: $1+i = 1,07 : i = 0,07$
Igualmente mediante calculadora, sin utilizar logaritmos, elevando a $\frac{1}{18}$ **ambos miembros, se puede obtener la respuesta**:
$(1+i)^{1/18} = \frac{3,3799321}{18} : 1+i = 1,07 : i = 1,07 - 1 : i = 7\%$
Cálculo de i: $48,25(1+i)^{-20} = \frac{478,48473}{42,15} - 1 : 48,25(1+i)^{-20} = 11,351951$
$(1+i)^{-20} = \frac{10,351951}{48,25} : (1+i)^{-20} = 0,214548$
Aplicando logaritmos: $\log(1+i)^{-20} = \log 0,214548$:
$-20\log(1+i) = \log 0,214548 : \log(1+i) = \frac{\log 0,214548}{-20}$
$\log(1+i) = \frac{-0,668475}{-20} : \log(1+i) = 0,033423$:
$1+i = \text{antilog} 0,033423 : 1+i = 1,08 : i = 1,08 - 1 : i = 0,08 : i = 8\%$
Utilizando la calculadora:
$(1+i)^{-20/20} = (0,214548)^{1/20} : (1+i)^{-1} = 0,925925 : \frac{1}{1+i} = 0,925925$:
$1+i = \frac{1}{0,925925} : i = 0,08 = 8\%$
Cálculo de n. Ahora calculemos n: $(1+0,05)^{-n} = 0,014339$
Aplicando logaritmos: $\log(1+0,05)^{-n} = \log 0,014339 : -n\log(1,05) = \log 0,014339$
$-n = \frac{\log(0,014339)}{\log(1,05)} : -n = \frac{-1,843469}{0,021189}$. **Multiplicamos por** (-1): $n = \frac{1,843469}{0,021189} = 87$:
$n = 87$ **períodos; no es necesario hallar antilogaritmo ya que n es el exponente.**
Cálculo de n:
$\frac{(1,02)^n - 0,897096}{0,11} = 91,909667 - 2,20 : (1,02)^n - 0,897096 = (91,909667 - 2,20)(0,11)$
$(1,02)^n = (89,709667)(0,11) + 0,897096 : (1,02)^n = 9,868063 + 0,897096$:
$(1,02)^n = 10,76516.$

Aplicando logaritmos: $\log(1,02)^n = \log 10,76516 : n = \dfrac{\log 10,76516}{\log 1,02} : n = 120$ períodos

Cálculo de n: $(1,017)^n = 5,20 : n = \dfrac{\log 5,20}{\log 1,017} : n = 97,8$ períodos.

PROGRESIONES

Son una serie de números o términos algebraicos en la que cada término posterior al primero puede obtenerse del anterior, sumándolo, multiplicándolo o dividiéndolo por una diferencia o razón común. Con un criterio similar al expuesto sobre logaritmos, se estudiarán brevemente las progresiones y su aplicación en las matemáticas financieras.

En este texto las progresiones se agrupan en 3 categorías:

■Aritméticas ■Geométricas ■Geométricas infinitas

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (PA)

Es una sucesión de números, llamados términos, en la que cualquier término posterior al 1º puede obtenerse del anterior, sumándole (restándole) un número constante llamado diferencia (razón) común (d).

Por ejemplo:

4; 8; 12; 16; 20; ….. la diferencia común es 4

80; 74; 68; 62; … …. la diferencia común es – 6

Obsérvese la progresión:

$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + a + (n - 1)d$

En la que a **es el 1**^{er} **término,** d **la diferencia común y** n **el número de términos.**

Cada término se forma sumando al 1º la diferencia común, tantas veces como el número de términos menos 1 se busque.

El último término buscado está en función del número de términos n.

$u = a + (n - 1)d$: Fórmula del último término de una PA

u = último término; a = 1er término; n = n° de términos; d = diferencia común

Así para encontrar el 20º término de la PA, si se tiene la siguiente progresión: 115; 112; 109; 106; …

Utilizamos la fórmula $u = a + (n - 1)d$, **en donde** $a = 115;\ n = 20;\ d = -3$

$u = 115 + (20 - 1)(-3); u = 115 + (19)(-3); u = 115 - 57 = 58.$

SUMA DE UNA PROGRESIÓN (PA)

La suma de una PA puede hallarse mediante una fórmula, cuya deducción se presenta a continua ción.

Sea la PA: $a; a + d; a + 2d; a + 3d; \ldots; a + (n - 2)d; a + (n - 1)d$

Totalizando, se puede escribir:

$S = a + (a + d) + (a + 2d)..+(u - 2d) + (u - d) + u \qquad (1)$

Reordenando: $S = u + (u - d) + (u - 2d) \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad (2)$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$2S = (a + u) + (a + u) + (a + u) + \cdots + (a + u) + (a + u) + (a + u)$

En consecuencia, la suma de los términos de una PA es igual a la mitad del número de términos multiplicada por la suma del 1º más el último término:

$2S = n(a + u)$:

$S = \frac{n}{2}(a + u)$: **Fórmula de la suma de términos de una PA**

Por ejemplo para encontrar la suma de los 30 primeros términos de la PA:

$15; 21; 27; 33; \ldots: S = (\frac{n}{2})(a + u)$

Es necesario calcular el último término:

$a = 15; n = 30; d = 6; u = a + (n - 1)d; u = 15 + (30 - 1)(6); u = 15 + 174; u = 189$

$S = (\frac{30}{2})(15 + 189); S = 15(15 + 189); S = 15(204); S = 3060$

EJEMPLO. Por la compra de una maquinaria, una empresa paga al final del 1er año \$50000, al final del 2º año \$45.000;al final del 3er año \$40000, ¿cuánto pagará por la maquinaria si hace 10 pagos?

$50000; 45000; 40000; ..$ **es una PA cuya razón es** -5000

$u = a + (n - 1)d$

$u = 50000 + (10 - 1)(-5000); u = 50000 + (9)(-5000); u = 5000$

$S = \left(\frac{n}{2}\right)(a + u); S = \left(\frac{10}{2}\right)(50000 + 5000) = \$275000$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (PG)

"Es una sucesión de números tales que cada uno de ellos se deduce del anterior multiplicándolo o dividiéndolo por una cantidad constante llamada razón". Así:

$980; 490; 245; 122,5; 61,25; \ldots$ **es una PG creciente cuya razón es** $0,5$.

$3; 9; 27; 81; \ldots$ **es una PG decreciente cuya razón es** 3.

Último término de una PG. **Sea la PG:** $a; ar; ar^2; ar^3; ar^4; \ldots$

El último término, cualquiera que éste fuere, será: ar^{n-1}

Si se quiere encontrar el término 10, será: $u = ar^{10-1} = ar^9$

Si se quiere hallar el último término, será: $u = ar^{n-1}$

Cálculo del último término de una PG

Donde: $u =$ **último término** $a =$ **1er término** $r =$ **razón común** $n =$ **número de términos**

Calculemos la suma de una PG.

Sea la progresión:

$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + .. + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad (1)$

Multipliquemos por r ambos miembros:

$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + .. + ar^{n-1} + ar^n \qquad (2)$

Restemos (2) de (1):

$S - Sr = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + (ar^3 - ar^3) + . + (ar^{n-2} - ar^{n-2}) + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n$

Simplificando:

$S(1 - r) = a - ar^n: S = \frac{a - ar^n}{(1 - r)}$ $r < 1$: **Suma de PG cuya razón es** < 1

Multiplicando por -1, **se obtiene la siguiente fórmula:**

$S = \frac{ar^n - a}{(r - 1)}$ $r > 1$: **Suma de PG cuya razón es** > 1

Entonces, para encontrar el término 10 y la suma de los 10 primeros términos de la PG:

$1.000; 1.500; 2.250; 3.375; \ldots$:
$r = 1,5 \quad u = ar^{n-1}r: u = 1.000(1,5)^{10-1}$:
$u = 1.000(1,5)^9 = 1.000(38,443359): u = 38.443.359$ es el término 10 de la progresión.
Se aplica la fórmula cuya razón es > 1:
$$S = \frac{ar^n - a}{(r-1)} = \frac{1000(1,5)10 - 1000}{1,5 - 1}: S = 113.330,08$$
Por otra parte, para calcular la suma de los 10 primeros términos se aplica la fórmula:
$r = 0,50; u = ar^{n-1}: u = 100(0,5)^9 = 0,195312$
$$S = \frac{a - ar^n}{(1-r)}$$
Utilizamos esta fórmula puesto que la razón es < 1.
$$S = \frac{100 - 100(0,5)10}{1 - 0,50} = \frac{100 - 0,087656}{0,50}: S = 199,80469$$
EJEMPLO. Cierta maquinaria tiene un valor actual de \$90000. Al final de cada año se deprecia 12%. Calcule su valor después de 10 años:
Valor inicial: \$90.000
Final del año 1: $90.000 - 90.000(0,12) = 90.000(1 - 0,12)$
Final del año 2: $90.000(1 - 0,12)(1 - 0,12) = 90.000(1 - 0,12)^2$
Final del año 3: $90.000(1 - 0,12)2(1 - 0,12) = 90.000(1 - 0,12)^3$
Se puede escribir la PG:
$90000 + 90000(1 - 0,12) + 90000(1 - 0,12)^2 + 90000(1 - 0,12)^3 + \cdots$
Siendo 90000 el 1^{er}término, $u = ar^{n-1}: u = 90000(1 - 0,12)^{10-1} =$
$90000(0,88)^9: u = \$28.483,05$: Valor al inicio del 10^o año.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA INFINITA (PG)

Tipo de PG cuya razón es <1, el número de términos es ilimitado, pero la suma de sus términos es cuantificable. Por ejemplo, sea la progresión: $1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \ldots$
Su razón es $\frac{1}{5}$ y el nº de sus términos es ilimitado. Consecuentemente, no hay último término, pero sí se puede calcularse la suma de sus términos. A continuación se presenta la demostración.
Utilizamos la fórmula de la suma de una PG cuya razón es $< 1: S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$
Separando en 2 fracciones con el mismo denominador:
$$S = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}; \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} \approx 0$$
Se puede dar valores a n:
Cuando $n = 10: \frac{1(0,2)^{10}}{1-0,2} = 0,000000128 = 1,28.10^{-7}$
Cuando $n = 50: \frac{1(0,2)^{50}}{1-0,2} = 1,4073728.10^{-35}$
Cuando $n = 100: \frac{1(0,2)^{100}}{1-0,2} = 1,58456.10^{-70}$
Podemos apreciar, entonces que, cuanto mayor es n, $\frac{ar^n}{1-r}$ tiende a 0.
Puede decirse que: $\lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r} \approx 0$

Luego, la suma de una PG infinita puede calcularse con la siguiente fórmula: $S = \dfrac{a}{1-r}$

FÓRMULA DE PG INFINITA

Al aplicar esta fórmula en la progresión: $1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125},$ **de razón** $\frac{1}{5}$ **y el número de términos, ilimitado,** $S = \frac{1}{1-0{,}20} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$

Entonces, para encontrar la suma de todos los términos de la progresión:

$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots : a = \frac{1}{2}; r = 0{,}5; n \to \infty : S = \dfrac{1}{1-0{,}5} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$

ECUACIONES

Se sugiere al lector que revise en matemáticas básicas el tema referente a ecuaciones de 1^er^ grado, sistemas de ecuaciones con 1, 2 ó 3 incógnitas y ecuaciones de 2º grado. De todos modos se realizará, a continuación, un breve repaso de las principales ecuaciones que podrían utilizarse en el presente texto:

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación de 1^er^ grado (variable con exponente 1), tiene la forma estándar $ax + b = c$. **Su solución consiste en despejar la variable** x. **Así:** $ax = c - b : x = \frac{c-b}{a}$. **Una vez hallado el valor de la variable o incógnita, se sustituye su valor en la ecuación dada, a fin de comprobar que la satisface.**

EJEMPLO. Resuelva $8x + \frac{2}{3}x = 24 + \frac{2}{3}x : 8x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x = 24 : 8x = 24 : x = \frac{24}{8} : x = 3$

Comprobación: $8.3 + \frac{2}{3}.3 = 24 + \frac{2}{3}.3 : 24 + 2 = 24 + 2.$

PROBLEMAS RESUELTOS MEDIANTE ECUACIONES DE 1ER GRADO

1) El dígito de las decenas de cierto número es el doble que el dígito de las unidades. Al invertir los dígitos, el nuevo número es 27 menos que el número original. Encuentre este número:Sean, x=dígito de las unidades; 2x:dígito de las decenas. El número original es 10(2x)+x;el número invertido es 10(x)+2x, y el nuevo número es el número original menos 27:10(x)+2x=10(2x)+x-27:x=3(dígito de las unidades);2x=2.3=6 (dígito de las decenas). El número es (6.10)+3=63.

2) La suma de los dígitos en cierto número de dos cifras es 12. Si los dígitos se invierten, el número es 18 unidades más grande que el número original. ¿Cuál es este número?:x:dígito de las unidades;12-x:dígito de las decenas. Entonces el número original es 10(12-x)+(x), y el número invertido es 10(x)+(12-x). Luego, el número invertido es el número original más 18.

Es decir, 10(x)+(12-x)=10(12-x)+(x)+18:x=7 (dígito de las unidades);12-x=5 (dígito de las decenas). El número es (5.10)+7=57.

Comprobación:

$10(7) + (12-7) = 10(12-7) + (7) + 18; 70 + 5 = 50 + 7 + 18; 75 = 75.$

Resuelva las siguientes ecuaciones de 1^er^ grado. Compruebe que la solución encontrada satisface la ecuación dada.

(a) $2x - 4 = \frac{1}{2}$: $x = \frac{9}{4}$ (b) $t + 3 = \frac{t}{3} - 1$: $t = -6$

(c) $4y - 3 = \frac{y}{5} + 4$: $y = \frac{35}{19}$ (d) $\frac{2z}{3} + \frac{z}{2} = \frac{z-8}{2}$: $z = -6$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Ecuaciones con dos incógnitas

En este apartado vamos a tratar con ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo, $2x - 5y = 7$, es una ecuación con dos incógnitas.

El par de valores $x = 6,\ y = 1$ es solución de esta ecuación porque $2.6 - 5.1 = 7$.

Definición: Llamamos solución de una ecuación con dos incógnitas a todo par de valores que hacen cierta la igualdad. Cabe destacar que si sólo tenemos una ecuación con dos incógnitas, tendremos infinitas soluciones. Las ecuaciones lineales se representan mediante rectas.

Para obtener las soluciones de dos incógnitas, se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra. Si representamos las dos ecuaciones que forman un sistema, como dos rectas, se puede observar que el punto donde se cortan dichas rectas (si se cortan) es la solución al sistema.

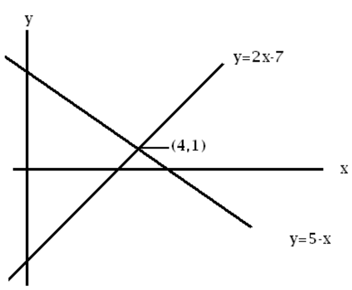
x	-1	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2	1

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

EJEMPLO

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$

Representación gráfica de ambas ecuaciones. Aquí podemos observar cómo la solución del sistema es $x = 4; y = 1$.



2. Sistemas de ecuaciones

Definición: Dos ecuaciones forman un sistema cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común. Cuando dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, las disponemos de esta forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Se llama solución de un sistema de ecuaciones a la solución común de ambas.

3. Sistemas equivalentes

Definición: Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes cuando tienen la misma solución.

4. Número de soluciones de un sistema lineal

Sistemas sin solución

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias.

Por ejemplo: $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

En este caso, nos dice, por una parte, que $2x + 3y = 15$ y, por otra, que $2x + 3y = 9$. Esto es absolutamente imposible porque para eso tendrían que adoptar las incógnitas valores distintos en cada ecuación y entonces no sería un sistema de ecuaciones.
Así sacamos la conclusión de que el sistema no tiene soluciones comunes y entonces se dice que el sistema es incompatible.

Sistemas con infinitas soluciones

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen lo mismo o que una ecuación es proporcional a la otra, es decir, tenemos 2 veces la misma ecuación. Veamos un ejemplo:
(1) $2x + 3y = 15$
(2) $4x + 6y = 30$
En (1) tenemos una ecuación idéntica a la (2). La 2ª ecuación es la misma ecuación (1), pero multiplicada por 2. Luego, si dividimos la 2ª ecuación por 2, obtendremos de nuevo dos ecuaciones idénticas.
En este caso el sistema se llamará compatible determinado, porque tiene soluciones, pero éstas son infinitas.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

(1) Método de sustitución

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.
Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método.
1º. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2º. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una incógnita.
3º. Se resuelve esta ecuación.
4º. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.
5º. Se ha obtenido, así, la solución.

(2) **Método de igualación**

Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes.
Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:
1º. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2º. Se igualan las expresiones, lo cual da lugar a una ecuación con una incógnita.
3º. Se resuelve esta ecuación.
4º. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.
5º. Se ha obtenido así la solución.

(3) **Método de reducción**

Este método consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Restando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene una ecuación con sólo una incógnita (se ha reducido el número de incógnitas).
Resumamos los pasos que debemos dar:
1º.Se preparan las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga).
2º.Al restarlas desaparece una de las incógnitas.
3º.Se resuelve la ecuación resultante.
4º.El valor obtenido se sustituye en una de las iniciales y se resuelve.
5º.Se obtiene, así, la solución.

Ejercicio resuelto por el método de reducción:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases}$$

Puesto que el coeficiente de la y **en la 1ª ecuación es doble que en la 2ª, multiplicando ésta por 2, se igualarán los coeficientes. Restando, se eliminará esta incógnita.**

$$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 5x + 2y = 15 \end{cases}$$

Multiplicamos por -2:

$3x + 4y = 9$

$-10x - 4y = -30$

Ahora sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$-7x = -21; x = \frac{-21}{-7}: x = 3$

Sustituimos $x = 3$ **en cualquiera de las expresiones iniciales** $3x + 4y = 9$:

$3 \cdot 3 + 4y = 9: 4y = 0: y = 0.$

Reglas prácticas para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Si una o las dos ecuaciones del sistema tienen un aspecto externo complicado, se empieza por "arreglarlas" hasta llegar a la expresión $ax + by = c$.
Recordemos las ventajas de cada uno de los 3 métodos aprendidos:
El método de sustitución es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficiente $+1$ ó -1 en alguna de las ecuaciones.
El método de reducción es muy cómodo de aplicar cuando una de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o bien sus coeficientes son uno múltiplo del otro.
Si queremos evitar las operaciones con fracciones, podemos conseguirlo aplicando 2 veces el método de reducción para despejar así, una y otra incógnita. Este consejo es especialmente útil cuando los coeficientes de las incógnitas son números grandes.

ACTIVIDADES. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

$a)\ x + y = 2; 2x + 3y = 5$ $b)\ x + y = 1; 3x + 2y = 3$ $c)\ 2x + y = 5; x + 3y = 5$
$d)\ 2x - y = 3; 4x + 3y = 1$ $e)\ x + y = 1; 3x - 4y = 7$ $f)\ 5x - y = 7; 2x + 3y = -4$
$g)\ 3x - 2y = 3; x - 3y = -6$ $h)\ 5x - y = 9; x - y = 1$ $i)\ 2x - 3y = 2; x - 2y = 0$

x	-1	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2	1

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Por el método de igualación:

$$x = \frac{19 - 3y}{2}; x = -1 + 2y$$

$$\frac{19 - 3y}{2} = -1 + 2y: 19 - 3y = 2(-1 + 2y): y = 3: x = -1 + 2.3: x = 5: \text{SOLUCIÓN}: (5, 3)$$

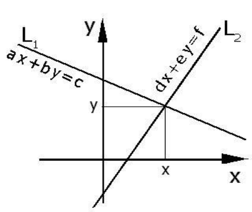
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Interpretación gráfica

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la siguiente la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Donde cada una de las ecuaciones corresponde a la ecuación de una recta.
Determinar la solución del sistema, es hallar un punto que satisfaga ambas ecuaciones, esto es, hallar el punto donde se intersectan ambas rectas. Gráficamente, la situación es la siguiente:



Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones (reducción, igualación, sustitución), pero acá veremos solamente un ejemplo en el cual utilizaremos el método de reducción.

EJEMPLO. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Multiplicando la 2ª ecuación por 2, obtenemos:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, para eliminar una de las variables, se obtiene: $7x = 21$: $x = 3$.

Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo, en la 2ª, tenemos: $4.3 + 2y = 16$: $y = 2$

Por lo tanto la solución del sistema es $(3, 2)$.

ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

podemos tener cualquiera de las siguientes situaciones:

i. Infinitas soluciones

Esto sucede cuando las ecuaciones representan a la misma recta. Se produce cuando los coeficientes de x, de y y los términos independientes son proporcionales:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

ii. Sin solución

Ocurre cuando el sistema de ecuaciones tiene los coeficientes de x y de y proporcionales entre sí, pero no proporcionales a los términos independientes:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} =\neq \frac{c}{f}$$

iii. Solución única

Esto acontece cuando los coeficientes de x y de y no son proporcionales:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

Es conveniente aclarar que la proporcionalidad entre los coeficientes de x y de y equivale a que las pendientes de las rectas son iguales, por lo tanto, es posible que:
Si las 3 razones son iguales, entonces son la misma recta, por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones.
Si solamente las razones de los coeficientes de x y de y son iguales, entonces las rectas son paralelas no coincidentes y el sistema no tiene solución.

EJEMPLO. **Hallar el valor de p de modo que el sistema no tenga solución.**
$(p-1)x+2y=-3$
$(p+2)x+4y=-1$
Como el sistema no tiene solución, entonces debe ocurrir que:

$$\frac{p-1}{p+2}=\frac{2}{4}\neq\frac{-3}{-1}$$

Y como, evidentemente, $\frac{2}{4}\neq\frac{-3}{-1}$, entonces podemos determinar p de la 1ª proporción.
Así, $\frac{p-1}{p+2}=\frac{2}{4}: p=4$

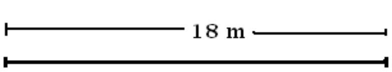
Resolver un sistema de ecuaciones equivale a encontrar el punto en el que se intersectan las rectas involucradas.
Como la resolución de un sistema de ecuaciones nos da un único valor, uno para "x", y uno para "y", entonces, concluimos que resolver un sistema de ecuaciones equivale a encontrar el punto en el que se intersectan las rectas involucradas.
Dicho de otra manera, si $x=a,\ y=b$ son las soluciones del sistema, entonces estas soluciones se pueden presentar en la forma (a,b), y decir que el punto (a,b) es solución del sistema de ecuaciones o del sistema de rectas.
Sabemos que la ecuación $ax+by=c$ representa una recta de pendiente $m=-\frac{a}{b}$, e intersección entre la recta y el eje de las ordenadas $n=\frac{c}{b}$. Por lo tanto, un sistema de ecuaciones:

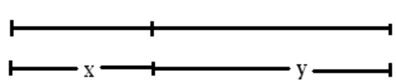
$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

representa un sistema de rectas.
Consideremos el sistema.
$x+y=18$

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$$

A continuación damos una manera simple y muy útil de resolver este sistema de ecuaciones.
Notemos que este sistema de ecuaciones puede representar la siguiente situación:"**Dado un segmento que mide 18 metros, dividirlo en 2 partes que son entre sí como 1 es a 2**"**.**





Notemos que al dividir el segmento en partes que son entre sí como 1 es a 2 $\left(\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\right)$, estamos dividiéndolo en 3 partes iguales, de las cuales a "x" le corresponde una parte y a "y" le corresponde 2 partes. Como 18 lo dividimos en 3 partes iguales, entonces cada parte es:

$\frac{18}{3} = 6\ \text{m}.$

Por lo tanto, $x = 6\ \text{m}, y = 6.2 = 12\ \text{m}.$

Plantea el sistema de ecuaciones y resuelve los problemas

1) El tío McPato invirtió \$ 10.000. Colocó una parte en el banco al 5% y el resto al 9%.¿Cuánto invirtió en cada instrumento si sus ingresos anuales fueron de \$ 660?:$x(5\%) = \$6000; y(9\%) = \$\,4000$

$$\begin{cases} 0,05X + 0,09Y = 660 \\ X + Y = 10.000 \end{cases}$$

2) La edad de María es el doble de la edad de Julia. Hace 10 años la suma de las edades de las dos era igual a la edad actual de María. ¿Cuáles son las edades actuales de María y Julia? $M = 40$ Años; $J = 20$ Años

$$\begin{cases} M = 2J \\ (M-10) + (J-10) = M \end{cases}$$

3)Un comerciante compra 1 pañuelo y 1 bufanda por Bs. 2000 y los vende por Bs.2260. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del pañuelo ganó el 10% y en la venta de la bufanda ganó el 15%?$x(\text{pañuelo}) = \text{Bs}.\,800; y(\text{bufanda}) = \text{Bs}.\,1200$

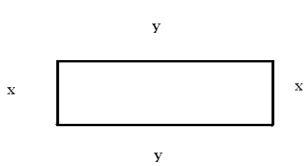
$$\begin{cases} X + Y = 2000 \\ 1,1X + 1,15Y = 2260 \end{cases}$$

4) En un colegio, entre chicos y chicas, hay 300 alumnos. Del total asisten a una excursión 155 alumnos. Se sabe que a la excursión ha ido el 60% de los chicos y el 40% de las chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el colegio?

$x(\text{chicos}) = 175; y(\text{chicas}) = 125$

$$\begin{cases} X + Y = 300 \\ 0,6X + 0,4Y = 155 \end{cases}$$

5) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?$x = 2\text{cm}; y = 6\text{cm}: A = (x.y) = 12\text{cm}^2$



$$\begin{cases} 2X + 2Y = 16 \\ Y = 3X \end{cases}$$

6) En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay en el corral? $x(\text{conejos}) = 26; y(\text{gallinas}) = 32$

$$\begin{cases} X + Y = 58 \\ 4X + 2Y = 168 \end{cases}$$

7) La edad de un padre es doble que la de su hijo. Hace 10 años la edad del padre era triple que la del hijo. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y del hijo?

$x = 40$ años; $y = 20$ años

$$\begin{cases} X = 2Y \\ X - 10 = 3(Y - 10) \end{cases}$$

8) La suma de dos números es 12 y su cociente es 3. Halla estos números: $x = 9; y = 3$

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ \frac{X}{Y} = 3 \end{cases}$$

9) Un padre desea repartir entre sus hijos una cantidad de Bs.10000. Al hijo mayor le quiere dar Bs. 2000 más que al menor. ¿Cuánto corresponderá a cada hijo?

$x = Bs.\,6000; y = Bs.\,4000$

$$\begin{cases} X + Y = 10000 \\ X = Y + 2000 \end{cases}$$

ECUACIÓN DE 2° GRADO. FÓRMULA DE CARNOT

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, sus raíces se obtienen utilizando la fórmula deducida por Sadi Carnot:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **donde las raíces son:**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO. Resolver la siguiente ecuación: $x^2 + 3x - 1 = 0$

De la ecuación: $a = 1; b = 3; c = -1$

Reemplazando en la fórmula: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{32 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$

Efectuando y reduciendo: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Las raíces de la ecuación: $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2};\ x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

Conjunto solución es: $\left(\dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right)$

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN. **Para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se tiene:**

I) Si $a \neq 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$, la ecuación es: **Compatible determinada**
II) Si $a = 0$ y $b = c = 0$, la ecuación es: **Compatible Indeterminada**
III) Si $a = 0$ y $b = 0$ y $c \neq 0$, la ecuación es: **Incompatible**

NATURALEZA DE LAS RAÍCES. **Llamamos discriminante a la expresión subradical contenida en la fórmula de Carnot, es decir:** $\Delta = b^2 - 4ac$. **De este modo la fórmula que da la solución a una ecuación de 2º grado queda así:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ANÁLISIS DEL DISCRIMINANTE. **Observando la relación anterior, resulta previsible que el valor y/0 signo del discriminante determinará la naturaleza de las raíces de una ecuación de 2º grado.**

Veamos los siguientes casos:

1°: $\Delta > 0$ En este caso las raíces de la ecuación serán reales y diferentes.

2°: $\Delta = 0$ En este caso las raíces de la ecuación serán reales e iguales. Este se presenta cuando el trinomio "$ax^2 + bx + c$" es un cuadrado perfecto.

3°: $\Delta < 0$ En este caso las raíces de la ecuación serán imaginarias y conjugadas. Debe notarse que las raíces imaginarias se presentan en parejas, siendo una la conjugada de la otra.

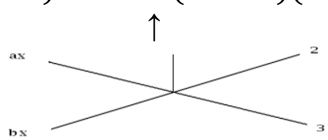
4°: $\Delta = k^2$ (cuadrado perfecto), siendo a, b y c, números racionales ($\mathbb{Q}$), las raíces de la ecuación serán racionales y, por lo tanto, reales. Pero si $\Delta \neq k^2$, las raíces de la ecuación serán irracionales (Q^c) conjugadas y, por lo tanto, son reales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1)Una raíz de $abx^2 + (3a + 2b)x + 6 = 0$, es:(A) $\frac{2}{a}$ (B) $\frac{b}{3}$ (C) $\frac{-2}{a}$ (D) $\frac{3}{b}$ (E) $\frac{-2}{a}$

Descomponiendo el 1[er] miembro en 2 factores, tendremos:

$abx^2 + (3a + 2b)x + 6 = (ax + 2)(bx + 3)$



La ecuación queda así:$(ax + 2)(bx + 3) = 0$. Las raíces serán:$X_1 = -\frac{2}{a}$; $X_2 = -\frac{3}{b}$.

2) Cuáles de las siguientes ecuaciones no admite raíces reales:

I) $x^2 - x - 1 = 0$II) $x^2 - 2x + 3 = 0$ III) $3x^2 + x - 2 = 0$

(A)Sólo I (B)Sólo II (C)Sólo III (D)II y III (E) I y II

Para responder a la pregunta será necesario analizar al discriminante de cada ecuación. Veamos:

(a)I: $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1)$: $\Delta = 5$. Observamos que $\Delta > 0$, luego la ecuación tiene raíces reales y diferentes.

(b)II: $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3)$: $\Delta = -8$. Observamos que $\Delta < 0$, luego la ecuación tiene raíces imaginarias y conjugadas.

(c)III: $\Delta = (1)^2 - 4(3)(-2)$: $\Delta = 25$.Observamos que $\Delta > 0$, luego la ecuación tiene raíces reales y diferentes.

Finalmente, la ecuación que no admite raíces reales será (II).

3) Calcule el valor de "$m - 2n$" si la ecuación cuadrática $5(m + n + 18)x^2 + 4(m - n)x + 3mn = 0$, es incompatible:(A) -9 (B) -18 (C) 9 (D) 18 (E) -13

Para que la ecuación dada sea incompatible, se debe cumplir que:

$5(m + n + 18) = 0$ (I)

$4(m - n) = 0$ (II)

$3mn \neq 0$ (III)

A partir de I y II, se puede establecer que:$\begin{cases} m + n = -18 \\ m - n = 0 \end{cases} \rightarrow m = -9; n = -9$

Observamos que estos valores satisfacen la condición III. Por lo tanto, diremos que el valor pedido será:$m - 2n = -9 - 2(-9) = 9$

4) **Calcular "m" para que la ecuación $6x^2+(2m+3)x+m=0$, tenga sólo 1 raíz:(A)3 (B)$\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{5}{3}$**

De acuerdo con la condición del problema, la ecuación dada, debe tener sólo una raíz y esto ocurre únicamente cuando las 2 raíces admitidas por la ecuación, son iguales. Luego, se deberá cumplir que $\Delta=0$. Por lo tanto, se establece que:

$(2m+3)^2-4(6)(m)=0$

Efectuando las operaciones indicadas: $4m^2-12m+9=0$

Reconociendo en el 1er miembro un TCP: $(2m-3)^2=0$: $m=\frac{3}{2}$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Para la ecuación: $ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$, **de raíces** X_1 **y** X_2, **tenemos:**

I) **Suma de raíces:** $S=X_1+X_2=-\frac{b}{a}$

II) **Producto de raíces:** $P=X_1.X_2=\frac{c}{a}$

III) **Diferencia de raíces:** $D=|X_1-X_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

EJEMPLO. De la ecuación: $2X^2-3X=5-2X$, **calcular:**

(I)Suma de raíces (II)Producto de raíces (III)Diferencia de raíces

Transponiendo todos los términos a un solo miembro, se obtiene: $2X^2-X-5=0$, **donde reconocemos que:** $a=2$; $b=-1$; $c=-5$. **Siendo** X_1 **y** X_2, **las raíces de la ecuación de acuerdo con las propiedades enunciadas, se tendrá:**

I) **Suma de raíces:** $X_1+X_2=-\left(-\frac{1}{2}\right)$: $S=\frac{1}{2}$

II) **Producto de raíces:** $X_1.X_2=-\frac{5}{2}$: $P=-\frac{5}{2}$

III) **Diferencia de raíces:** $|X_1-X_2|=\frac{\sqrt{(-1)^2-4(2)(-5)}}{2}$: $D=\frac{\sqrt{41}}{2};-\frac{\sqrt{41}}{2}$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Considerando X_1 **y** X_2, **como raíces de la ecuación tal que:**

$S=$ **Suma de raíces;** $P=$ **Producto de raíces**

La ecuación que originó a dichas raíces se determina así: $x^2-Sx+P=0$.

EJEMPLO. ¿Cuál es la ecuación cuadrática que admite como raíces -1 y $+3$?

Por dato tenemos: $x_1=-1$; $x_2=3$. **Recordamos que:**

$$\left.\begin{aligned} S&=x_1+x_2=-1+3=2\\ P&=x_1.x_2=(-1)(3)=-3\end{aligned}\right\}\ (*)$$

La ecuación buscada se encuentra a partir de: $x^2-Sx+P=0$ $(**)$

Reemplazamos (*) en (**): $x^2-2x-3=0$: **raíces** -1 **y** $+3$.

1) **¿Para qué valores de "m" la ecuación $x^2-2(3m+1)x+7(2m+3)=0$, tendrá sus 2 raíces iguales?(A)5; 2 (B)1; $-\frac{3}{2}$ (C)4; -2 (D)3; -1 (E) 2; $-\frac{10}{9}$**

De acuerdo con el enunciado, las raíces de la ecuación deberán ser iguales y esto sólo puede ocurrir si su discriminante es igual a cero, es decir:

$b^2-4ac=0$ $(*)$

Reconociendo a, b y c de la ecuación original, y reemplazando en $(*)$:

$[-2(3m+1)]^2-4(1)[7(2m+3)]=0$

Efectuando las operaciones indicadas: $4(3m+1)^2 - 4(14m+21) = 0$
Simplificando y reduciendo: $9m^2 - 8m - 20 = 0$. **Descomponiendo:** $(9m+10)(m-2) = 0$
Igualando a cero cada factor: $m_1 = -\frac{10}{9}$; $m_2 = 2$
2) La ecuación cuadrática cuyas raíces son: $2+\sqrt{2}$; $2-\sqrt{2}$, **es:**
(A) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (B) $x^2 + 4x + 2 = 0$ (C) $2x^2 - 4x + 1 = 0$
(D) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (E) $x^2 - 8x + 2 = 0$
La reconstrucción de una ecuación cuadrática se inicia a partir de la siguiente expresión:
$x^2 - Sx + P = 0(1)$
Por datos sabemos que $x_1 = 2+\sqrt{2}$; $x_2 = 2-\sqrt{2}$ $(*)$
De $(*)$ **se deduce que:** $S = x_1 + x_2 = 4$; $P = x_1.x_2 = 2(2)$
Reemplazando (2) **en** (1), **la ecuación buscada es:** $x^2 - 4x + 2 = 0$
3) Si "α" y "β" son las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 5 = 0$, **encontrar una ecuación cuadrática de raíces sean:** α^2 **y** β^2.
(A) $x^2 + 14x + 25 = 0$ (B) $x^2 + 14x + 15 = 0$ (C) $x^2 - 2x - 1 = 0$
(D) $x^2 - 14x - 25 = 0$ (E) $x^2 - 14x + 25 = 0$
Empleando el mismo argumento del ejercicio anterior diremos que la ecuación buscada tiene la forma: $x^2 - Sx + P = 0$ (I)
Por condición del problema, la suma de raíces (S) y el producto de raíces (P), deben ser:
$S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha.\beta$ (II)
$P = \alpha^2.\beta^2 = (\alpha.\beta)^2$ (III)
Si α y β, son raíces de la ecuación dada, aplicando las propiedades de raíces, tendremos que:
$\alpha + \beta = 2$; $\alpha.\beta = -5$
Reemplazando estos valores en (II) y (III): $S = 2^2 - 2(-5) = 14$; $P = (-5)^2 = 25$ (IV)
Reemplazando (IV) en (I), la ecuación buscada será: $x^2 - 14x + 25 = 0$
4) ¿Para qué valor de "m" las raíces de la ecuación $x^2 - (m+3)x + \frac{m^2}{4} + 1 = 0$, **se diferencian en 2?**
(A) $-\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{2}{3}$
Si x_1 **y** x_2 **son las raíces de la ecuación, por condición del problema, se debe cumplir que:**
$x_1 - x_2 = 2$ (I)
De las propiedades de las raíces, se sabe que:
$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \quad \text{(II)}$$
A partir de la ecuación dada reconocemos que: $a = 1$; $b = -(m+3)$; $c = \frac{m^2}{4} + 1$ (III)
Reemplazando (I) y (III) en (II), obtenemos: $|2| = \frac{\sqrt{[-(m+3)]^2 - 4(1)\left(\frac{m^2}{4} + 1\right)}}{1}$
Efectuando las operaciones indicadas:
$|2| = \sqrt{(m+3)^2 - (m^2+4)}$
Con la finalidad de eliminar el signo radical, elevamos, ambos miembros, al cuadrado:
$4 = (m+3)^2 - (m^2+4)$.
Efectuando operaciones: $4 = 6m + 5$. **Se concluye que:** $m = -\frac{1}{6}$.

5)Determine la suma de los valores que puede tomar "a" para que la ecuación $(a+1)x^2+ax+1=0$, tenga una sola solución si "a" es un número real diferente de -1.
(A) 12 (B) $4\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 5 (E) 6
De acuerdo con lo expuesto hasta ahora, debemos reconocer que si la ecuación cuadrática dada tiene sólo una solución, se debe cumplir que sus raíces deben ser iguales (el discriminante de la ecuación dada debe ser igual a cero). Veamos:$b^2-4ac=0$ $(*)$
Reemplazando a, b y c de la ecuación dada en $(*)$, tendremos: $a^2-4(a+1)(1)=0$
Luego, la ecuación que permite calcular los valores de "a" es:
$a^2-4a-4=0$
Como se pide la suma de los valores de "a", aplicaremos la propiedad de las raíces:$a_1+a_2=-\frac{-4}{1}=4$
6) Los valores de "x" que satisfacen la ecuación $\sqrt{2x+13}=\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+6)}$, tienen la propiedad que, su suma es:(A) -14 (B) -7 (C) -9 (D) -2 (E) 7
Con la finalidad de eliminar al signo radical, elevamos, ambos miembros, al cuadrado, obteniendo:$2x+13=2x+9+2\sqrt{(x+3)(x+6)}$
Reduciendo y simplificando:$2=\sqrt{(x+3)(x+6)}$
Elevando otra vez al cuadrado:$4=x^2+9x+18$
Simplificando y transponiendo términos: $x^2+9x+14=0$.
Factorizando:$(x+7)(x+2)=0$. Igualando a cero cada factor:$x_1=-7; x_2=-2$
Reemplazando cada valor obtenido en la ecuación original, evaluamos que la única solución que verifica la ecuación es:$x=-2$
7) Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2+bx+4c=0$, y ,$2r+k$, y, $2s+k$ de $x^2+\alpha x+\beta=0$, entonces $(\alpha^2-4\beta)$, es igual a:
(A) $2b^2-16x$ (B)b^2-16c (C)b^2-4c (D)$4b^2-64c$ (E) $4b^2-32x$
Aplicando las propiedades de las raíces a ambas ecuaciones, se tendrá:
(1) Para la 1ª ecuación de raíces r y s, se cumple:$r+s=-b; r.s=4c$ $(*)$
(2) Para la 2ª ecuación de raíces $2r+k; 2s+k$, se cumplirá que:
La suma de raíces nos dá:$2r+k+2s+k=-\alpha$: $\alpha=-[2(r+s)+2k]$
Sustituyendo $(r+s)$ por $-b$, tendremos:$\alpha=2b-2k$ (I)
El producto de raíces nos dá:$(2r+k)(2s+k)=\beta$: $\beta=k^2+2(r+s)k+4(rs)$
Sustituyendo $(r+s)$ por $-b$, y $(r.s)$ por $4c$, tendremos:$\beta=k^2-2bk+16c$ (II)
Sea T el valor pedido, entonces:$T=\alpha^2-4\beta$ (III)
Reemplazando (I) y (II) en (III), obtenemos:$T=(2b-2k)^2-4(k^2-2bk+16c)$
Efectuando las operaciones indicadas:$T=4b^2-8bk+4k^2-4k^2+8bk-64c$
Al simplificar, el valor pedido será:$T=4b^2-64c$
8) Si la ecuación $x^2-(A+C)x+AC-B^2=0$, tiene raíces r y s, y si, además $AC-B^2>0$, entonces:(A)$A>0, C<0$ (B)Sólo $A>0, C>B$ (C) Sólo $A<0, C<0$
(D) r y s tienen signos diferentes, y, $r+s=A+C$.
(E) r y s tienen mismo signo y A y C tienen mismo signo que r y s.
Teniendo en cuenta las propiedades de las raíces, se plantea:
$r+s=A+C$(I) $r.s=AC-B^2$(II)
Por condición del problema $AC-B^2>0$: $AC>B^2>0$. Observe que de esta resolución podemos deducir que A y C tienen igual signo. De esta conclusión, en (II) podemos

afirmar que $r.s > 0$. En consecuencia, r y s, tienen igual signo. De la relación (I), podemos deducir, además, que r y s tienen el mismo signo de A y C.

9) La suma de los cuadrados de las raíces de $x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$, es igual a "k". Determine el mínimo valor de "k". (A)10 (B) 12 (C) 9 (D) 4 (E) 8

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación. Luego, por condición del problema se tendrá:

$k = {x_1}^2 + {x_2}^2$

Utilizando los productos notables $k = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 . x_2)$ (1)

Aplicando las propiedades de las raíces, tendremos:

$x_1 + x_2 = -(m-2)$; $x_1 . x_2 = -(m+3)$ (2)

Reemplazando (2)en (1): $k = [-(m-2)]^2 - 2[-(m+3)]$

Efectuando operaciones: $k = m^2 - 4m + 4 + 2m + 6$

Reduciendo términos semejantes: $k = m^2 - 2m + 10$

Reconociendo al TCP: $k = (m-1)^2 + 9$ $(*)$

Diremos que "k" asume un valor mínimo, cuando la expresión $(m-1)^2$ asume también un valor mínimo e igual a cero. Por tal razón, concluimos que: $kmín = 9$

EJERCICIOS VARIOS

Calcule i:

a) $(1+i)^{180} = 5,99580$: $i = 1\%$ b) $(1+i)^{90} = 1,95909$: $i = 0,75\%$

c) $(1+i)^{-120} = 0,092892$: $i = 2\%$ d) $8,35 + (1+i)^{-180} = 12,50 - 3,88945$: $i = 0,75\%$

e) $(1+i)^{35} = 28,666723$: $i = 10\frac{1}{16}\%$

Calcule n:

a) $(1+0,05)^n = 63,254353$: $n = 85$ d) $(1+0,015)^{-n} = 0,1675232$: $n = -120$

b) $(1+0,0125)^n = 2,107181$: $n = 60$ e) $(1+0,025)^{-n} = 0,1174098$: $n = -180$

c) $(1+0,09125)^n = 158,345924$: $n = 58$ f) $(1+0,005)^{-n} = 0,4732501$: $n = -150$

Encuentre el término 20º y la suma de los 20 primeros términos de las progresiones:

a) $-75; -60; -45; \ldots$: 210 y 1.350 b) $-2; -2\frac{3}{4}; -3\frac{2}{4}; \ldots$: $16\frac{1}{4}$ y $182\frac{1}{2}$

c) $3; -1; -5; \ldots$: -73 y 95 d) $0; -3; -6; \ldots$: -57 y -570

e) $-3; 2; 7; 12; \ldots$: 92 y 890 f) $0; 3x; 6x; \ldots$: $57x$ y $570x$

Una empresa desea la estabilidad de sus empleados y mantiene una política de incremento de los salarios. Si el salario inicial de un nuevo empleado es de \$360 y se considera un incremento anual del 10%, ¿ cuál será el sueldo del empleado después de 20 años? : \$2201,73

Una comercializadora tiene 12750 clientes. Con un nuevo programa de ventas espera incremen tar este número en 250 cada año. ¿ Cuántos clientes tendrá después de 10 años? : 15000 clientes

Una persona se compromete a pagar, en forma ascendente durante 36 meses, una deuda por la compra de un automóvil; el 1er pago es de \$500; el 2º de \$510; el 3º de \$520 y así sucesivamente. ¿ Cuánto habrá pagado en total durante los 36 meses? : \$24300

Encuentre el 10º término y la suma de los 10 primeros términos de las siguientes PG:

a) $2; 4; 8; 16; \ldots$: 1.024 y 2.046 b) $-2; -6; -18; \ldots$: -39.366 y -59.048

c) $-2; 4; -8; 16; \ldots$: 1.024 y 682 d) $3; 15; 75; \ldots$: $5.859.375$ y $7.324.218$

Una empresa tiene ventas de \$110000 anuales y desea incrementar el 12% anualmente. ¿ Cuánto venderá al inicio del año 12? : \$382640,50

Encuentre la suma de las siguientes PG infinitas: a) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \ldots$: $1,33..$ b) $2000; 400; 80; \ldots$: 2500

®Víctor M. Pató S. (USB)
Prohibidos su uso o reproducción con fines lucrativos sin autorización explícita del autor.