IUGT

APUNTES DE MÁTEMATICAS FINANCIERAS

Conceptos y Definiciones Básicas

Todas las carreras

Profesor: Andrés Scott

Según Syllabus del I.U.G.T.

APUNTES DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

TÍTULO I

INTERÉS PRIMERA PARTE

CAPÍTULO I

Interés Simple

1.-Matemática Financiera.-Es la parte de la matemática aplicada al estudio de operaciones financiera ciertas, donde están interrelacionados cuantitativamente tres elementos esenciales, capital, tasa de interés y el plazo o tiempo.

1.1.-Operaciones financieras ciertas.- Son las que no dependen de la existencia de personas, ni de elementos que entran en juego de las operaciones comerciales.

1.2.-Operaciones financieras contingentes.- Son las que tienen que ver con la existencia de personas y elementos que entran en juego. Ejm. Las operaciones de las aseguradoras.

2.-Interés (I).- Financieramente hablando, se define como el precio que se paga por el uso del dinero que se tiene en préstamo durante un tiempo determinado. También se puede definir como el pago por el uso del dinero ajeno, o es el precio del alquiler del capital que se usa en calidad de préstamo o es el beneficio que produce un capital.

Cuando se tiene un año de 360 días se considera al interés (I) como ordinario o comercial, en cambio cuando se tiene el año de 365 días se considera al interés (I_E) como real o exacto.

3.-Interés Simple (I).- Es cuando el interés o beneficio que se paga por un capital prestado se cobra al final de cada período de tiempo, quedando solamente el capital para producir nuevos intereses o beneficios en el siguiente período de tiempo; el beneficio producido no va a formar parte del capital original.

$$I = Cin$$

4.- <u>Valores del dinero de trabajo.-</u> El dinero de trabajo se presenta al inicio cuando se presta, capital, y al final cuando se retira junto con el beneficio, monto.

4.1.-Capital (C).- Es un conjunto de bienes valorados cuantitativamente según una unidad monetaria, pudiendo quedar sujeta a variaciones a través del tiempo. También se conoce como Valor Presente, Valor Actual o Valor Inicial.

$$C = \frac{I}{in}$$

4.2.-Monto (M).- Es la suma del capital invertido más los intereses ganados o beneficios producidos. Se conoce también como Valor Futuro o Valor Final.

$$M = C + I$$

$$C = \frac{M}{1+in}$$

$$M = C(1+in) \longrightarrow i = \frac{M - C}{Cn}$$

$$n = \frac{M - C}{Ci}$$

5.-<u>Tasa de Interés (i).-</u> Es el número de unidades monetarias que corresponden a una unidad de capital, en una unidad de tiempo; es decir es un factor que aplicado a un capital, genera un interés por unidad de tiempo.

5.1-Tasa Porcentual Anual (i%).- Es la que se aplica sobre una unidad de tiempo de un año y representa una o varias unidades del total de 100 partes en que se haya dividido el capital.

5.2.-Tasa Unitaria Anual (i).- Es la misma tasa porcentual pero dividida entre 100.

$$i = \frac{I}{Cn}$$

5.3.-Tasa Activa.- Es la tasa que aplica cada Banco al cliente por el crédito que se le otorga.

5.4.-Tasa Pasiva.-_Es la tasa que aplica cada Banco por los diversos tipos de depósitos que realiza cada cliente.

5.5.-Tasa Diferencia.- Es la diferencia entre la Tasa Activa y la Tasa Pasiva.

5.6.-Tasa de Redescuento.- Es la tasa que el Banco Central de Venezuela les aplica a las instituciones financieras por la recompra de créditos entre los mismos bancos.

Tasas

De mayor a menor se divide　　　　De menor a mayor se multiplica

Secuencia de tiempo	**Entre**	**Secuencia de tiempo**	**Por**
Anual a mensual	1/12	Mensual a anual	12
Anual a semanal	1/52	Semanal a anual	52
Anual a diario	1/360	Diario a anual	360
Mensual a diario	1/30	Diario a mensual	30
Semanal a diario	1/7	Diario a semanal	7

6.-Tiempo (n).- Es el plazo, período o lapso que durará colocado un capital, bien como inversión, bien como préstamo.

$$n = \frac{I}{Ci}$$

Entre las variables tiempo y tasa debe haber una estrecha relación, y deben ser compatibles las unidades establecidas para el tiempo con la unidad de tiempo establecida en la tasa. Ej. Años-anual, meses-mensual, semana-semanal, días-diario.

6.1.-Relaciones entre las diversas unidades de tiempo.

Tiempos

De mayor a menor se multiplica De menor a mayor se divide

Unidad de tiempo	**Por**	**Unidad de tiempo**	**Entre**
Año a meses	12	Mes a años	1/12
Año a semanas	52	Semana a años	1/52
Año a días	360	Día a años	1/360
Mes a días	30	Día a meses	1/30
Semana a días	7	Día a semanas	1/7

6.2.- Tabla para el cálculo del tiempo entre fechas.

Del día del mes inicial	Al mismo día del mes terminal											
	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Ene.	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Feb.	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Mar.	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abr.	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
May.	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Jun.	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Jul.	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Ago.	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Sep.	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Oct.	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Nov.	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Dic.	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Nota: Año no bisiesto. No se incluye el día inicial.

Caso 1.- Cuando se tiene el mismo día pero de meses diferentes. En este caso, se ubica el mes inicial en las columnas de meses y el mes final en la fila de meses y donde se cruzan ese es el número de días. **Ejemplo:** Obtener el número de días desde el 3 de mayo al 3 de octubre del mismo año, como es de observar ambos meses se cruzan en el valor 153 entonces han transcurrido 153 días.

Caso 2.- Cuando el día del mes terminal es mayor que el día del mes inicial. En este caso, se suma la diferencia la diferencia de los días al número definido por el mes inicial y el mes terminal. **Ejemplo:** Obtener el número de días entre 3 de septiembre de un año y el 15 de abril del año siguiente.

Diferencia: 15 – 3 = 12. Intercepción: septiembre-abril = 212, luego 212 +12 = 224, entonces han transcurrido 224 días.

Caso 3.- Cuando el día del mes terminal es menor que el día del mes inicial. En este caso, la diferencia entre el día terminal y el día inicial es negativa, por lo tanto se resta. **Ejemplo:** Obtener el número de días entre el 18 de marzo y el 10 de noviembre del mismo año.

Diferencia: 10 -18 = -8. Intercepción: marzo-noviembre = 245, luego: 245 – 8 = 237, entonces han transcurrido 237 días.

Caso 4.- Cuando se tiene más de un año.__En este caso se establece el número de años realizando la respectiva operación de diferencia entre los años y luego se combina con los casos anteriores. **Ejemplo:** Obtener el número de días entre el 15 de abril del 2.003 y el 17 de octubre del 2.007

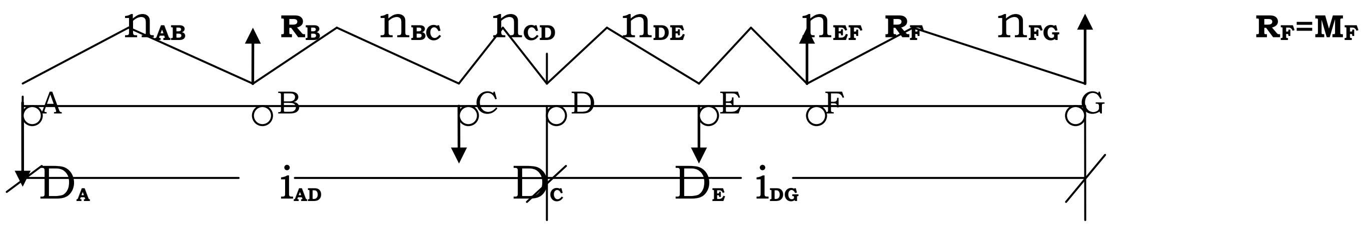
Del 15 de abril del 2.003 al 15 de abril del 2.007, transcurren 4 año = 1.440 días. El 15 de abril al 17 de octubre del mismo año, segundo caso, diferencia 17 – 15 = 2. Intercepción: abril-octubre = 183, luego: 1.440 + 183 + 2 = 1.625, entonces han transcurrido 1.625 días.

7.-Relación entre el Interés Exacto o Real y el Interés Ordinario o Comercial.-

$$I = \frac{72 I_E}{73}, I_E = \frac{73 I}{72}$$

8.- Diagrama de tiempo y flujo de caja

Es un diagrama constituido por el segmento de una recta limitado por un punto inicial donde se inicia un proceso de depósitos y retiros de dinero y que concluye con el retiro del monto final de lo ahorrado. En ese segmento se definen puntos donde se señalan los lapsos de tiempo en los cuales se producen los respectivos depósitos y retiros de dinero, así como los cambios de tasa de interés de haberlos. Los depósito se señalan con flechas hacia abajo, los retiros con flechas hacia arriba y los posibles cambios de tasa con pequeños segmentos verticales sin dirección.



Para obtener el beneficio o pérdida al final de los depósitos se realiza la siguiente operación:

$$B = \sum R_i - \sum D_i$$

Si B resulta positivo hubo ganancia, y se resulta negativo hubo pérdida

Problemas Resueltos de Interés Simple

<u>PROBLEMA 01.-</u> Un comerciante al colocar un capital éste le produjo un beneficio de Bs 565,00. Hallar el monto, si fue colocado en las siguientes condiciones: a) En 3 años al 5% semestral., b) En 10 meses y 15 días al 1% semanal, c) En 285 días al 0,8% semanal y d) En mes y medio al 40% trimestral. (Interés Simple)

$Datos: I = 565;\ \ Fórmulas: M = C(1 + in)\ y\ C = \frac{I}{in} \Rightarrow\ M = \frac{I(1 + in)}{in}$

$a)\ n = 3\ años;\ \ i\% = 5\%\ semestral;\ M = ?$

$n = 3 \times 2\ semestres;\ \ i = 0{,}05\ semestral$

$$M = \frac{565(1 + 0{,}05 \times 6)}{0{,}05 \times 6} \Rightarrow\ M = 2.448{,}33$$

$b)\ n = 10\ meses\ \ y\ 15\ días;\ \ i\% = 1\%\ semanal;\ M = ?$

$n = (10 \times 30 + 15)\, días = 315\ días;\ \ i = \frac{0{,}01}{7}\, diario$

$$M = \frac{565\left(1 + \frac{0{,}01 \times 315}{7}\right)}{\frac{0{,}01 \times 315}{7}} \Rightarrow\ M = 1.820{,}56$$

$c)\ n = 285\ \ días;\ \ i\% = 0{,}8\%\ semanal;\ M = ?$

$n = 285\ días;\ \ i = \frac{0{,}008}{7}\, diario$

$$M = \frac{565\left(1 + \frac{0{,}008 \times 285}{7}\right)}{\frac{0{,}008 \times 285}{7}} \Rightarrow\ M = 2.299{,}65$$

$d)\ n = 1{,}5\ meses;\ \ i\% = 40\%\ trimestral;\ M = ?$

$n = \left(1{,}5/3\right) trimestres = 0{,}5\ trimestres;\ \ i = 0{,}4\ trimestral$

$$M = \frac{565(1 + 0{,}4 \times 0{,}5)}{0{,}4 \times 0{,}5} \Rightarrow\ M = 3.390{,}00$$

<u>PROBLEMA 02.-</u> Al principio de un mes cualquiera se colocan Bs 2.500,00, al comenzar el segundo mes se coloca el doble del capital anterior y así sucesivamente hasta empezar el quinto mes, en el cual se hizo la última colocación. Si la tasa de Interés Simple es del 6% semestral; ¿Qué dinero se retira al concluir el mes 10?

$Datos: i\% = 6\ semestral;\ \ C_k = 2.500;\ 5.000;\ 10.000;\ 20.000;\ 40.000;\ \ n_k = (10; 9; 8; 7; 6)\ meses.$

$Fórmulas: M_k = C_k(1 + in_k)\ y\ M_T = \sum_{k=1}^{5} M_k$

$i = \left(0{,}06/6\right) mensual = 0{,}01\ mensual$

$M_T = 2.500(1 + 0{,}01 \times 10) + 5.000(1 + 0{,}01 \times 9) + 10.000(1 + 0{,}01 \times 8) + 20.000(1 + 0{,}01 \times 7) +$

$40.000(1 + 0{,}01 \times 6) = 2.750 + 5.450 + 10.800 + 21.400 + 42.400 \Rightarrow\ M_T = 82.800;00$

PROBLEMA 03.- ***Una persona invierte un capital al 7% anual, y Bs. 250,00 más de lo que había invertido anteriormente al 9% anual. Si la ganancia a los 18 meses a Interés Simple fue de Bs 1.250,00. ¿Cuánto habría sido el capital invertido cada vez? y ¿Cuánto el interés producido por cada uno?***

$Datos: n = 18\ meses \Rightarrow 1{,}5\ años;\ I = 1.250;\ i_1\% = 7\%\ anual;\ i_2\% = 9\%\ anual;$

$Fórmula: I = Cin;\ Condiciones: C_1 + 250 = C_2;\quad I_1 + I_2 = 1.250$

$I_1 = 0{,}07 \times 1{,}5C_1 \Rightarrow I_1 = 0{,}105C_1$

$I_2 = 0{,}09 \times 1{,}5C_2 \Rightarrow I_2 = 0{,}135C_2$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = -250 \Rightarrow C_1 = C_2 - 250 \\ 0{,}105C_1 + 0{,}135C_2 = 1.250 \Rightarrow 0{,}105(C_2 - 250) + 0{,}135C_2 = 1.250 \Rightarrow 0{,}105C_2 - 26{,}25 + 0{,}135C_2 = 1.250 \Rightarrow \end{cases}$$

$$0{,}24C_2 = 1.276{,}25 \Rightarrow C_2 = \frac{1.276{,}25}{0{,}24} = 5.317{,}71 \Rightarrow C_1 = 5.317{,}71 - 250 = 5.067{,}71 \Rightarrow$$

$I_1 = 0{,}07 \times 1{,}5 \times 5.067{,}71 = 532{,}11\ e\ I_2 = 0{,}09 \times 1{,}5 \times 5.317{,}71 = 717{,}89$

$C_1 = 5.067{,}71;\ C_2 = 5.317{,}71;\ I_1 = 532{,}11;\ I_2 = 717{,}89$

PROBLEMA 04.- ***Un capital se coloca al 11% anual a Interés Simple durante 42 meses y al mismo día se coloca otro capital del mismo monto también a Interés Simple al 13% anual durante 60 meses. Si la diferencia de los beneficios entre las dos colocaciones fue de Bs 5.500,00; ¿cuál es el monto de ambos capitales?***

$Datos: n_1 = 42\ meses = 3{,}5\ años;\ i_1\% = 11\%\ anual;\ n_2 = 60\ meses = 5\ años;\ i_2\% = 13\%\ anual;\ C_1\ y\ C_2 = ?$

$Fórmula: I = Cin;\ Condiciones: I_2 - I_1 = 5.500;\ C_1 = C_2 = C;\quad I_1 + I_2 = 1.250$

$I_1 = Ci_1n_1 \Rightarrow I_1 = 0{,}11 \times 3{,}5C \Rightarrow I_1 = 0{,}385C$

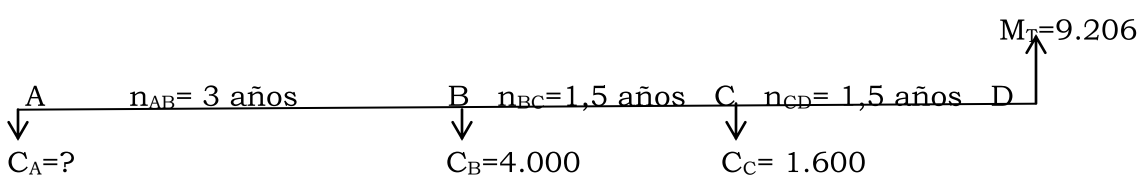
$I_2 = Ci_2n_2 \Rightarrow I_2 = 0{,}13 \times 5C \Rightarrow I_2 = 0{,}65C$

$Sustituyendo\ en\ la\ primera\ condición: 0{,}65C - 0{,}385C = 5.500 \Rightarrow 0{,}265C = 5.500 \Rightarrow C = 20.754{,}72$

PROBLEMA 05.-Después de varias colocaciones durante 6 años a Interés Simple una persona retira Bs 9.422,00. Al inicio colocó una cantidad la cual no se acuerda, a los 3 años coloca Bs 4.000,00 y luego a los 4 años y medio Bs 1.600,00. Si las colocaciones se hicieron a un 9% anual;¿ cuánto fue el monto del capital inicial y cuánto fue el beneficio percibido por la persona?

$Datos: En\ la\ linea\ del\ tiempo\ para\ el\ flujo\ de\ caja;\ i = 0{,}09;\ M_T = 9.422{,}00$

$Fórmula: M = C(1 + in)$

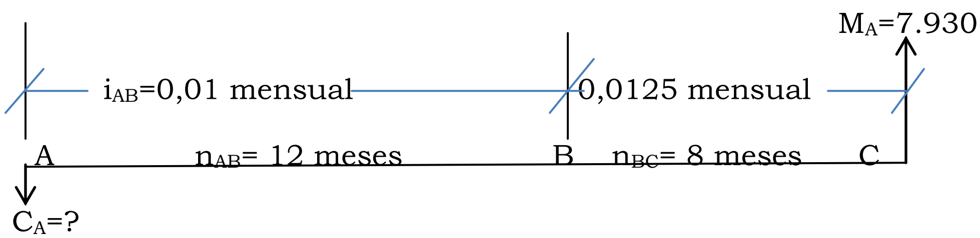


$$M_A = C_A(1+in_{AD}) = C_A(1+0{,}09\times 6) \Rightarrow M_A = 1{,}54C_A$$
$$M_B = C_B(1+in_{BD}) = 4.000(1+0{,}09\times 3) \Rightarrow M_B = 5.080$$
$$M_C = C_C(1+in_{CD}) = 1.600(1+0{,}09\times 1{,}5) \Rightarrow M_C = 1.816{,}00$$
$$M_A + M_B + M_C = M_T \Rightarrow 1{,}54C_A + 5.080 + 1.816 = 9.206 \Rightarrow 1{,}54C_A = 9.206 - 5.080 - 1.816 \Rightarrow$$
$$1{,}54C_A = 2.310 \Rightarrow C_A = 1.500{,}00$$

PROBLEMA 06.- ***Una persona desea obtener Bs 8.008,00 en 20 meses. ¿Cuánto debe depositar en un banco que abona el12% anual de Interés Simple durante el primer año, y el 5% trimestral durante el resto de tiempo?***

$Datos: En\ la\ linea\ del\ tiempo\ para\ el\ flujo\ de\ caja;\ i_1 = 0{,}12\ anual;\ i_2 = 0{,}05\ trimestral;\ M_T = 8.000$

$Fórmula: M = C + I$



$$M_{AC} = C_A + I_{AB} + I_{BC} \Rightarrow C_A + 0{,}01\times 12C_A + 0{,}0125\times 8C_A = 7.930$$
$$1{,}22C_A = 7.930 \Rightarrow C_A = 6.500{,}00$$

PROBLEMA 07.- ***Se tienen dos capitales los cuales suman Bs 8.200,00. El primero fue colocado a una tasa de Interés Simple del 6% semestral y el segundo también a Interés Simple a una tasa del 3,75% trimestral. ¿A cuánto monta cada capital si al cabo de 30 meses se retiran del banco Bs 11.012,50?***

$Datos: n = 30\ meses = 2{,}5\ años;\ i_1\% = 6\%\ semestral = 0{,}12\ anual;\ i_2 = 3{,}75\%\ trimestral = 0{,}15\ anual;\ M_T = 11.012{,}50$

$Fórmula: M = C(1+in);\ Condición: C_1 + C_2 = 8.200;$

$$M_1 + M_2 = 11.012{,}50 \Rightarrow C_1(1+i_1n) + C_2(1+i_2n) = 11.012{,}50 \Rightarrow (1+0{,}12\times 2{,}5)C_1 + (1+0{,}15\times 2{,}5)C_2 = 11.012{,}50 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 1{,}3C_1 + 1{,}375C_2 = 11.012{,}50 & (1) \\ C_1 \quad + \quad C_2 = \ 8.200{,}00 & (2) \end{cases} \Rightarrow C_1 = 8.200{,}00 - C_2\ \ sustituyendo\ en\ (1) \Rightarrow$$
$$1{,}3(8.200{,}00 - C_2) + 1{,}375C_2 = 11.012{,}50 \Rightarrow 10.660 - 1{,}3C_2 + 1{,}375C_2 = 11.012{,}50 \Rightarrow$$
$$0{,}075C_2 = 352{,}5 \Rightarrow C_2 = 4.700{,}00;\ luego\ C_1 = 8.200 - 4.700 \Rightarrow C_1 = 3.500{,}00$$

PROBLEMA 08. ***-Una persona ahorrativa abre una Cuenta de Ahorro efectuando 4 depósitos bimestrales: a) Al inicio Bs 3.000,00, b) Luego Bs 4.000,00, c) Siguiendo con Bs 5.000,00 más el 40% de los interese simples devengados a la fecha y d) Por último Bs. 8.000,00. Estos depósitos fueron efectuados para retirar el dinero en un año, con sus respectivos beneficios. Si las tasas de Interés Simple varían trimestralmente de la manera siguiente: 12%, 15%, 18% y 21% respectivamente y todas anuales; ¿cuánto retirará la persona al finalizar el año?***

$$Datos: n_1 = \left(\tfrac{1}{6}\right) años;\ n_2 = \left(\tfrac{1}{3}\right) años;\ n_3 = \left(\tfrac{1}{2}\right) años\ y\ n_4 = \left(\tfrac{2}{3}\right) años$$

$$C_1 = 3.000,00;\ C_2 = 4.000,00;\ C_3 = 5.000,00 + 40\%\ de\,los\,\mathrm{int.}\ dev.\ a\ la\ fecha;\ C_4 = 8.000,00$$

$$i_{1-2} = 0,12\,anual;\ i_{2-3} = 0,15\,anual;\ i_{3-4} = 0,18\,anual\ y\ i_{4-5} = 0,21\ anual$$

$$Fórmulas: M = C + I;\ I = Cin$$

$$I_1 = I_{1-2} + I_{2-3} + I_{3-4} + I_{4-5} = 3.000\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,12 + 3.000\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,15 + (3.000)\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,18 + (3.000) \times 0,21 = 495,00$$

$$I_2 = I_{1^*-2} + I_{2-3} + I_{3-4} + I_{4-5} = 4.000\left(\tfrac{1}{12}\right) \times 0,12 + 4.000\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,15 + (4.000)\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,18 + (4.000) \times 0,21 = 580;00$$

Intereses devengados a los 4 meses de haberse realizado el primer depósito:

$$I_{A(1-3)} = 3.000\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,12 + 3.000\left(\tfrac{1}{12}\right) \times 0,15 + 4.000\left(\tfrac{1}{12}\right) \times 0,12 + 4.000\left(\tfrac{1}{12}\right) \times 0,15 = 217,50$$

$$I_3 = I_{2^{**}-3} + I_{3-4} + I_{4-5} = 5.217,50\left(\tfrac{1}{6}\right) \times 0,15 + 5.217,50\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,18 + 5.217,50\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,21 = 639,14$$

$$I_4 = I_{3-4} + I_{4-5} = 8.000\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,18 + 8.000\left(\tfrac{1}{4}\right) \times 0,21 = 780,00$$

$$M_T = C_T + I_T;\quad C_T = 3.000,00 + 4.000,00 + 5.217,50 + 8.000,00 = 20.217,50$$

$$I_T = 495,00 + 580,00 + 639,14 + 780 = 2.494,14 \Rightarrow M_T = 22.711,64$$

PROBLEMA 09.- ***Un comerciante obtuvo un beneficio exacto o natural de Bs 506,94, a Interés Simple. El quisiera saber ¿qué capital?, le produciría el equivalente beneficio o interés comercial en las condiciones siguientes: a) Al 11% anual en 21 meses, b) Al 0,39 % mensual en 3 años, c) Al 0,18 % semanal en 19 meses y d) Al 9% anual desde el 06-04-04 al 21-03-06.***

Datos: $I_E = 506{,}94$; *Fórmulas*: $C = I(in)^{-1}$ *e* $I = 72\times 73^{-1} I_E$

$I = 72\times 73^{-1}\times 506{,}94 = 499{,}9956 \approx 500{,}00$

$a)\ n = \left(7/4\right)$ *años*; $i = 0{,}11$ *anual*; $C = ?$

$$C = 500\left(\frac{0{,}11\times 7}{4}\right)^{-1} \Rightarrow C = 2.597{,}40$$

$b)\ n = 3$ *años*; $i = \left(\frac{0{,}0013}{4}\right)$ *anual*; $C = ?$

$$C = 500\left(0{,}0039\times 12\times 3\right)^{-1} \Rightarrow C = 3.561{,}25$$

$c)\ n = 19$ *meses* $= 570$ *días*; $i = 0{,}0018$ *semanal* $= \left(0{,}0018/7\right)$ *diarios*; $C = ?$

$$C = 500\left(\frac{0{,}0018\times 570}{7}\right)^{-1} \Rightarrow C = 3.411{,}31$$

$d)\ n =$ *Desde* $6/4/2010$ *hasta el* $21/3/2012$; $i = 0{,}09$ *anual* $= \left(0{,}01/40\right)$ *diarios*; $C = ?$

Del $6/4/10$ *al* $6/4/11 \Rightarrow 1$ *año* $\Rightarrow n_1 = 360$ *días* (*Año Comercial*)

Se emplea la Tabla de entre fechas para lapsos menores a un año;

Mes Inicial $\rightarrow$ *Abril*; *Mes Final* $\rightarrow$ *Marzo* $\Rightarrow n_2 = 334$

Día Mes Inicial $\rightarrow 6$; *Día Mes Final* $\rightarrow 21 \Rightarrow$ *Como falta para llegar al* 21 *se restan y se toman positivo*,

es decir $n_3 = 15$ *días* $\Rightarrow n = 360 + 334 + 15 = 709$ *días*

$$C = 500\left(\frac{0{,}01\times 709}{40}\right)^{-1} \Rightarrow C = 2.820{,}87$$

***<u>PROBLEMA 10.-</u>* Se dan en crédito dos capitales a tasas de intereses simples distintas. La suma de esos capitales es de Bs 18.000,00y la suma de las tasas es de 22% anual, el primer capital produce un beneficio de Bs 2040,00 y el segundo capital Bs 1900,00 ambos en 2 años. Determinar el monto de los dos capitales y las tasas de interés que se le aplicaron.**

Datos: $I_1 = 2.040$; $I_2 = 1.900$; $n = 2$ *años*

Fórmula: $i = I/(Cn)$ *y* $C = I/(in)$; *Condición*: $C_1 + C_2 = 18.000$; $i_1 + i_2 = 0{,}22$

$$i_1 = \frac{I_1}{C_1 n};\ i_2 = \frac{I_2}{C_2 n} \Rightarrow i_1 = \frac{2.040}{2C_1};\ i_2 = \frac{1.900}{2C_2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 18.000 \Rightarrow C_2 = 18.000 - C_1 \\ \dfrac{1.020}{C_1} + \dfrac{950}{C_2} = 0,22 \Rightarrow 1.020C_2 + 950C_1 = 0,22C_1C_2 - 950C_1 = 1020C_2 \Rightarrow C_1(0,22C_2 - 950) = 1.020C_2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1.020C_2}{0,22C_2 - 950} = \frac{510C_2}{0,11C_2 - 475} \Rightarrow \frac{510C_2}{0,11C_2 - 475} + C_2 = 18.000 \Rightarrow$$

$$510C_2 + 0,11C_2^2 - 475C_2 = 1.980C_2 - 8.550.000 \Rightarrow 0,11C_2^2 - 1.945C_2 + 8.550.000 = 0 \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{1.945 + \sqrt{(-1.945)^2 - 4 \times 0,11 \times 8.550.000}}{2 \times 0,11} \Rightarrow C_2 = 9.500,00 \Rightarrow C_2 = 18.000 - 9.500 \Rightarrow C_1 = 8.500,00;$$

$$i_1 = \frac{1.020}{8.500} \Rightarrow i_1 = 0,12 \text{ ó } i_2\% = 12\%; \quad i_2 = \frac{950}{9.500} \Rightarrow i_2 = 0,10 \text{ ó } i_2\% = 10\%$$

PROBLEMA 11.- ***Una persona coloca dos capitales a Interés Simple a una tasa del 15% anual, sumando ambos capitales obtenemos Bs 10.000,00. El primer capital dura colocado 8 meses más que el segundo produciendo ambos el mismo interés o beneficio de Bs 500,00. ¿Cuánto será el monto de cada capital y su tiempo de colocación?***

$$Datos: i = 0,15\, anual = 0,0125\, mensual;\ \ Fórmula: I = Cin,\ y\ C = I/(in);$$

$$Condiciónes: C_1 + C_2 = 10.000;\quad n_1 = n_2 + 8\ meses;\ I_1 = I_2 = I = 500$$

$$I_1 = 0,15\left(\frac{n_2}{12} + \frac{2}{3}\right)C_1 \Rightarrow 0,0125n_2C_1 + 0,10C_1 = 500;(1)\ I_2 = 0,0125n_2C_2 \Rightarrow 0,0125n_2C_2 = 500;\ como\ C_2 = 10.000 - C_1 \Rightarrow$$

$$0,0125n_2(10.000 - C_1) = 500 \Rightarrow n_2(125 - 0,0125C_1) = 500 \Rightarrow n_2 = 500/(125 - 0,0125C_1)\ sustituyendo\ en\ (1) \Rightarrow$$

$$\frac{0,0125 \times 500C_1}{125 - 0,0125C_1} + 0,10C_1 = 500 \Rightarrow 6,25C_1 + 0,10C_1(125 - 0,0125C_1) = 500(125 - 0,0125C_1)$$

$$6,25C_1 + 12,5C_1 - 0,00125C_1^2 = 62.500 - 6,25C_1 \Rightarrow 0,00125C_1^2 - 25C_1 + 62.500 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{25 + \sqrt{(-25)^2 - 4(0,00125)(62.500)}}{2 \times 0,00125} \Rightarrow$$

$$C_i = (17.071,07);(2.928,93),\ por\ ser\ C_1 + C_2 = 10.000;\ se\ toma\ C_1 = 2.928,93;\ por\ lo\ que: C_2 = 7.071,07$$

$$n_2 = 500/(125 - 0,0125C_1) \Rightarrow n_2 = 500/(125 - 0,0125 \times 2.928,93) \Rightarrow n_2 = 5,656852\ meses = 5\,meses\ y\ 20\,días \Rightarrow n_1 = 13\,meses\ y\ 20\,días$$

PROBLEMA 12.- ***Un capital de Bs 1.000,00 y otro de Bs 2.000,00, producen entre ambos anualmente Bs 400,00. ¿A qué tasa de Interés Simple están colocados cada uno de esos capitales, si las tasas de interés guardan una relación de 4 a 5? Y ¿Cuál será el beneficio que produce ambos capitales?***

$$Datos: C_1 = 1.000;\ C_2 = 2.000;\ n = 1\ año;\ Fórmula: I = Cin;$$

$$Condiciónes: I_1 + I_2 = 400;\quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5i_1 = 4i_2$$

$$C_1 i_1 + C_2 i_2 = 400;\ como\ podemos\ hacer: i_1 = \frac{4i_2}{5} \Rightarrow \frac{4C_1 i_2}{5} + C_2 i_2 = 400,\ sustituyendo \Rightarrow$$

$$\frac{4.000 i_2}{5} + 2000 i_2 = 400 \Rightarrow 800 i_2 + 2000 i_2 = 400 \Rightarrow 28 i_2 = 4 \Rightarrow i_2 = \tfrac{1}{7} = 0{,}1429 \Rightarrow i_2\% = 14{,}29\% \Rightarrow$$

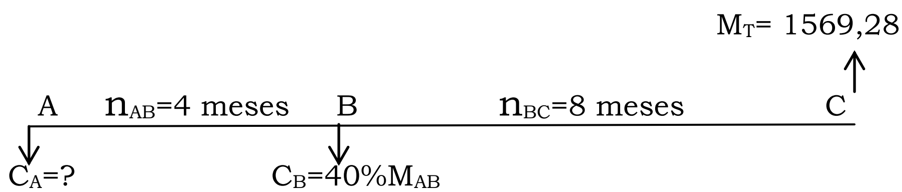
$$i_1 = \frac{4 \times \left(\tfrac{1}{7}\right)}{5} \Rightarrow i_1 = \tfrac{4}{35} = 0{,}1143 \Rightarrow i_1\% = 11.43\%$$

$$I_1 = 1.000 \times \frac{4}{35} \Rightarrow I_1 = 114{,}29;\quad I_2 = 2.000 \times \frac{1}{7} \Rightarrow I_2 = 285{,}71$$

__PROBLEMA 13.-__ Una persona tal día como hoy coloca un capital al 12% anual a Interés Simple, al pasar 4 meses desea colocar el 40% del monto producido por la primera colocación. Manteniendo la misma tasa de interés simple, ¿cuál sería el capital colocado si al finalizar el año retira del banco un monto de Bs 1.569,28?

$Datos: En\ la\ linea\ del\ tiempo\ para\ el\ flujo\ de\ caja;\ i_1 = 0{,}12\ anual;\ n = 1\ año = 12\,meses;\ M_T = 1.569{,}28$

$$Fórmula: M = C(1 + in)\ \ y\ \ C = \frac{M}{1 + in}$$



$$M_{AC} + M_{BC} = 1.569{,}28\,(1);\quad M_{AB} = C_A(1 + 0{,}01 \times 4) = 1{,}04 C_A \Rightarrow C_B = 0{,}40 \times 1{,}04 C_A = 0{,}416 C_A;\ desarrollando\ (1):$$

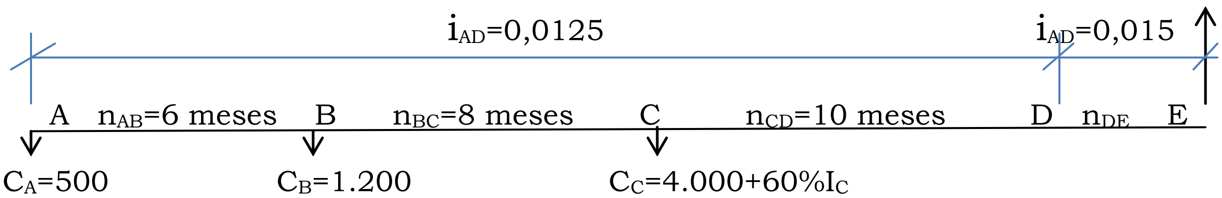
$$C_A(1 + 0{,}01 \times 12) + C_B(1 + 0{,}01 \times 8) = 1.569{,}28 \Rightarrow 1{,}12 C_A + 0{,}416 \times 1{,}08 C_A = 1.569{,}28 \Rightarrow 1{,}56928 C_A = 1.569{,}28 \Rightarrow$$

$$C_A = 1.000{,}00$$

__PROBLEMA 14.-__ Tal día como hoy una persona está planificando reunir para dentro de 2 años y medio un dinero para completar la cuota inicial para la compra de un vehículo. Hace 6 meses ya había colocado Bs 500,00 en una entidad bancaria al 15% anual a Interés Simple, hoy se dispone a depositar en la misma entidad bancaria Bs 1.200,00 y para dentro de 8 meses tiene previsto depositar Bs 4.000,00 más un 60% del interés que haya producido las colocaciones anteriores a la fecha. Si 6 meses antes de finalizar los dos y medio la tasa de interés aumenta en un 3% anual; ¿cuánto será el monto que retirará la persona al finalizar el segundo año contado desde hoy para darlo en pago de la cuota inicial de su vehículo?

$Datos: En\ la\ linea\ del\ tiempo\ para\ el\ flujo\ de\ caja;\ i_{AD} = 0,0125\ mensual;\ i_{DE} = 0,01\ mensual;$

$$Fórmula: I = Cin;\quad y\quad M = \sum_{k=1}^{n} C_k + \sum_{K=1}^{n} I_K$$



$$I_{AC} = 500 \times 0,0125 \times 14 = 87,50;\ I_{BC} = 1.200 \times 0,0125 \times 8 = 120,00;\ luego\ I_{AC} + I_{BC} = 207,5;\ por\ lo\ que$$

$$C_C = 4.000,00 + 0,6 \times 207,5 = 4.124,50;$$

$$I_1 = I_{(AD)A} + I_{(DE)A} = C_A i_1 n_{AD} + C_A i_2 n_{DE} \Rightarrow I_1 = 500 \times 0,0125 \times 24 + 500 \times 0,015 \times 6 = 195,00$$

$$I_2 = I_{(AD)B} + I_{(DE)B} = C_B i_1 n_{AD} + C_B i_2 n_{DE} \Rightarrow I_2 = 1.200 \times 0,0125 \times 18 + 1.200 \times 0,015 \times 6 = 378,00$$

$$I_3 = I_{(AD)C} + I_{(DE)C} = C_C i_1 n_{AD} + C_C i_2 n_{DE} \Rightarrow I_2 = 4.124,5 \times 0,0125 \times 10 + 4.124,5 \times 0,015 \times 6 = 886,77$$

$$M_T = \sum_{k=1}^{3} C_k + \sum_{k=1} I_K = 500,00 + 1.200,00 + 4124,50 + 195,00 + 378,00 + 1.531,55 \Rightarrow M_T = 7.284,27$$

<u>PROBLEMA 15.-</u> Con lo que produce un capital en 5 años colocado al 15% anual a Interés Simple, se compraron Bonos de la Deuda Pública que producen beneficios a un 12% anual, gravado con el 45% de impuesto, obteniendo de este modo Bs 1.000,00 de utilidad cada año. Calcular el capital colocado al 15% anual.

$$Datos: n = 5\,años;\ Utilidad = 1.000;\ i_{Capital} = 0,15\,anual;\ i_{Bono} = 0,12\ anual;\ Fórmula: I = Cin$$

$$Interés\ del\ Capital: I_C = 0,15 \times 5C = 0,75C;\quad Interés\ del\ Bono = 0,12 \times 0,75C = 0,09C;\ luego\,de$$

$$acuerdo\,a\,las\,condiciones\,del\,problema\,se\,tiene\,que:$$

$$0,09C - 0,45 \times 0,09C = 1.000 \Rightarrow 0,0495C = 1.000 \Rightarrow C = 20.202,02$$

Capítulo II

Descuento y Vencimiento a Interés Simple

1.- Descuento.- Es una operación de crédito que se lleva a cabo principalmente en instituciones bancarias, que consiste en que éstas adquieren documentos (Letras de cambio, Pagarés, etc.) de cuyo valor nominal descuentan una suma equivalente a los intereses que devenga el documento acordado entre la fecha en que se recibe y la fecha en que se vence.

Tipos de descuentos.
- Descuento comercial, bancario o abusivo (D)
- Descuento racional o matemático (D_R)

Símbolos a usar en este capítulo:

D = Descuento comercial, bancario o abusivo.

D_R = Descuento racional o matemático.

d = Tasa de descuento comercial aplicada al valor nominal.

I = Tasa de interés aplicada al valor actual.

n = Plazo para el descuento.

g = Gastos operacionales del descuento.

N = Valor nominal o valor futuro.

A = Valor actual, valor presente o valor efectivo.

1.1.- DESCUENTO COMERCIAL.- La cantidad de dinero a descontar se obtiene a una tasa calculada a interés simple, sobre el valor nominal del documento descontado.

$$D = Ndn$$

Por definición sabemos que **valor actual** no es más que el valor nominal menos el descuento por concepto de intereses, y el **valor nominal** es la cantidad que aparece inscrita en el documento a ser descontado y que será cobrable en la época de su vencimiento; por lo que podemos concluir que:

$$A = N - D \qquad N = A + D \qquad D = N - A$$

1.1.1.- Valor actual en función del valor nominal o viceversa.

$$A = N(1 - dn) \qquad N = A / (1 - dn) \text{ o } N = A(1 - dn)^{-1}$$

1.1.2.- Descuento comercial con gastos.

Si al negociar un documento comercial se le descuentas los intereses y gastos operacionales, para obtener el valor actual se aplican dos procedimientos: **Primero.-** Se calcula el descuento comercial por concepto de intereses. Seguidamente se obtienen los gastos. La suma de los intereses más los gastos se deducen del valor nominal o futuro y lo que resulte de esta operación es el valor actual o efectivo y **Segundo.-** El valor actual se puede conseguir mediante dos fórmulas; en primer lugar, cuando los gastos son señalados de manera porcentual sobre el valor nominal, y la fórmula sería:

$$A = N\,(1 - dn - g\% / 100)$$

Y en segundo lugar, si los gastos se establecen como una cantidad absoluta fija, y la fórmula sería:

$$A = N\,(1 - dn) - g$$

1.1.3.- El documento a descontar produce intereses.

Al valor inscrito en el documento se le calcula el valor futuro o monto, con la tasa de interés que se le ha establecido. Ese monto asume la función del valor nominal y con él se calcula el valor actual en función del valor nominal.

1.2.- DESCUENTO RACIONAL.- La cantidad de dinero a descontar se obtiene con una tasa calculada a interés simple, sobre el valor actual, antes de deducir los gastos operacionales si los hubiere.

$$D_R = Ain \quad \text{o} \quad D_R = N - A$$

Combinando estas dos expresiones matemáticas podemos obtener una fórmula donde el descuento racional nos viene dado en función del valor nominal, tiempo y tasa.

$$D_R = \frac{Nin}{1+in}$$

1.2.1.- Valor actual en función del valor nominal o viceversa.

$$A = \left(\frac{N}{1+in}\right) \qquad N = A\left(1+in\right)$$

1.2.2.- Diferencia entre el descuento comercial y el descuento racional.

$$D - D_R = \left(\frac{Din}{1+in} \right)$$

$$D - D_R = D_R in$$

1.2.3.- Relación entre el descuento comercial y el descuento racional.

$$\frac{D}{D_R} = 1 + in$$

2.- <u>Vencimiento a interés simple.</u>

2.1.- **Vencimiento común.-** El vencimiento común de dos o más obligaciones, es la fecha única en la cual se cancelan esas obligaciones.

Símbolos:

N = Valor nominal de la deuda original

G = Valor nominal nuevo de deuda consolidada

n = Plazo de tiempo de la deuda original

k = Plazo de tiempo de la deuda consolidada.

Valor nominal de la deuda consolidada

Descuento comercial

$$G_1\,(1-dk_1)+G_2\,(1-dk_2)+\ldots=N_1\,(1-dn_1)+N_2\,(1-dn_2)+\ldots$$

Descuento Racional

$$\frac{G_1}{1+ik_1}+\frac{G_2}{1+k_2}\cdots=\frac{N_1}{1+in_1}+\frac{N_2}{1+in_2}\cdots$$

Fecha del vencimiento común.

Descuento comercial: $n = {(N - A)}/{Nd}$

Descuento racional: $n = \dfrac{N/A - 1}{i}$

El valor actual se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$A = N_1(1 - dn_1) + N_2(1 - dn_2) + \cdots$$

2.2.-**Vencimiento medio.** Es el equilibrio donde la suma de los productos de las deudas originales por sus respectivos tiempos ha de ser igual a la suma de los productos de las cantidades a cancelar, o también, el equilibrio done la suma de de los productos de las cantidades anticipadas por los tiempos anticipados, deberá ser igual la suma de los productos de las cantidades prorrogadas por los tiempos prorrogados.

$$G_1k_1 + G_2k_2 + \cdots = N_1n_1 + N_2n_2 + \cdots$$

2.3.- Definiciones adicionales.

Descontar un pagaré.- Es la acción de recibir o pagar hoy una cuantía menor en el valor de un dinero, a cambio de una suma mayor comprometida para fecha futura, bajo las condiciones convenidas en el documento que se negocia.

Intereses de mora.-_Intereses que se cobran calculados en base al valor nominal por el tiempo que se retrasa el pago.

Comisiones.- Son cantidades de dinero que se pagan o cobran por la prestación de un servicio.

Descuento por pronto pago.-_Son descuento que acostumbra a ofrecer los comercios mayoristas, que permiten al comprador escoger entre varias alternativas su forma de pago, según el tiempo en que se anticipe el pago sobre el plazo expresado en la lista de precios del mayorista.

Fecha focal.- Fecha a donde se trasladan todos los flujos de cajas, previamente acordada entre las partes, y donde se establece la comparación de los ingresos con los egresos, en ese punto se plantea la respectiva ecuación de valor.

Problemas Resueltos de Descuento Simple

PROBLEMA 01.- ***Teniendo una letra cuyo Valor Nominal es de Bs. 5.000,00, se quiere saber; ¿cuál es su Descuento Comercial y su Descuento Racional en las condiciones siguientes: a) En 15 meses al 125 anual, b) En 210 días al 5% semestral y c) En 8 semanas al 4% trimestral?***

$$Datos: N = 5.000,00;\ Fórmulas: D = Ndn\ \ y\ \ D_R = Nin(1+in)^{-1}$$

$$a)\ n = 15\ meses = 1,25\,años;\ i = d = 0,12\,anual;$$

$$Descuento\ Comercial: D = 5000 \times 0,12 \times 1,25 \Rightarrow \color{blue}{D = 750,00}$$

$$Descuento\ Racional: D_R = 5.000,00 \times 0,12 \times 0,125(1+0,12 \times 1,25)^{-1} \Rightarrow \color{blue}{D_R = 652,17}$$

$$b)\ n = 210\ días;\ i = d = 0,05\,semestral = 0,000278\ diario$$

$$Descuento\ Comercial: D = 5000 \times 0,000278 \times 210 \Rightarrow \color{blue}{D = 291,90}$$

$$Descuento\ Racional: D_R = 5.000,00 \times 0,000278 \times 210(1+0,000278 \times 210)^{-1} \Rightarrow \color{blue}{D_R = 275,80}$$

$$c)\ n = 8\,semanas = 56\ días;\ i = d = 0,000444\ diario$$

$$Descuento\ Comercial: D = 5000 \times 0,000444 \times 56 \Rightarrow \color{blue}{D = 124,32}$$

$$Descuento\ Racional: D_R = 5.000,00 \times 0,000444 \times 56(1+0,000444 \times 56)^{-1} \Rightarrow \color{blue}{D_R = 121,30}$$

PROBLEMA 02.- ***En Descuento Comercial y Descuento Racional, ¿cuál será el Valor Actual de una letra de Bs. 2.000,00 descontada bajo las condiciones siguientes: a) En 6 meses al 10% anual, b) En 60 días al 5% cuatrimestral y c) En 30 semanas al 0,75% mensual?***

$Datos: N = 2.000,00;\ Fórmulas: A = N(1 - dn)\ y\ A = N(1 + in)^{-1};\ D = ?\ y\ D_R = ?$

$a)\ n = 6\ meses = 0,5\ años;\ i = d = 0,1\ anual;$

$Descuento\ Comercial:\ D = 2.000,00(1 - 0,1 \times 0,5) \Rightarrow$ $A = 1.900,00$

$Descuento\ Racional:\ D_R = 2.000,00(1 + 0,1 \times 10,5)^{-1} \Rightarrow$ $D_R = 1.904,76$

$b)\ n = 60\ días;\ i = d = 0,05\ cuatrimestral = 0,000417\ diario$

$Descuento\ Comercial:\ D = 2.000,00(1 - 0,000417 \times 60) \Rightarrow$ $A = 1.949,96$

$Descuento\ Racional:\ D_R = 2.000,00(1 + 0,000417 \times 60)^{-1} \Rightarrow$ $D_R = 1.951,18$

$c)\ n = 30\ semanas = 210\ días;\ i = d = 0,0075\ mensual = 0,00025\ diario$

$Descuento\ Comercial:\ D = 2.000,00(1 - 0,00025 \times 210) \Rightarrow$ $A = 1.895,00$

$Descuento\ Racional:\ D_R = 2.000,00(1 + 0,00025 \times 210)^{-1} \Rightarrow$ $D_R = 1.900,24$

PROBLEMA 03.- ***En Descuento Comercial y Descuento Racional, hallar el Valor Nominal de una letra de cambio cuyo Valor Actual es de Bs. 2.500,00 descontada a las tasas de Interés Simple y lapsos de tiempos siguientes: a) En 4 meses al 8% anual, b) En 120 días al 2,5% bimestral y c) En 20 semanas al 2/3% mensual.***

$Datos: N = 2.500,00;\ Fórmulas: N = A(1 - dn)^{-1}\ y\ N = A(1 + in);\ D = ?\ y\ D_R = ?$

$a)\ n = 4\ meses = 0,333333\ años;\ i = d = 0,08\ anual;$

$Descuento\ Comercial:\ N = 2.500,00(1 - 0,08 \times 0,333333)^{-1} \Rightarrow$ $N = 2.568,49$

$Descuento\ Racional:\ N = 2.500,00(1 + 0,08 \times 0,333333) \Rightarrow$ $N = 2.566,67$

$b)\ n = 120\ días;\ i = d = 0,025\ bimestral = 0,000417\ diario$

$Descuento\ Comercial:\ N = 2.500,00(1 - 0,000417 \times 120)^{-1} \Rightarrow$ $N = 2.568,49$

$Descuento\ Racional:\ N = 2.500,00(1 + 0,000417 \times 120) \Rightarrow$ $N = 2.566,67$

$c)\ n = 20\ semanas = 140\ días;\ i = d = 0,0067\ mensual = 0,000223\ diario$

$Descuento\ Comercial:\ N = 2.500,00(1 - 0,000223 \times 140)^{-1} \Rightarrow$ $N = 2.580,57$

$Descuento\ Racional:\ N = 2.500,00(1 + 0,000223 \times 140) \Rightarrow$ $N = 2.578,05$

PROBLEMA 04.- ***¿A cuánto montará el Valor Nominal de las letras siguientes si se tiene: a) D=Bs. 120,00y D_R=Bs. 110,00 y b)D=Bs.235,00 y D_R=Bs.225,00.***

$Datos: Ver\ los\ literales:\ \ Fómula: N = D \times D_R (D - D_R)^{-1};\ N = ?$

$a)\ D = 120;\ D_R = 110 \Rightarrow N = 120 \times 110(120 - 110)^{-1} \Rightarrow$ $N = 1.320,00$

$b)\ D = 235;\ D_R = 225 \Rightarrow N = 235 \times 225(235 - 225)^{-1} \Rightarrow$ $N = 5.287,50$

PROBLEMA 05.- ***Si el Descuento Racional de un pagaré es de Bs. 800,00 y la diferencia con respecto al Descuento Comercial es de Bs. 120,00, ¿cuál será el Valor Nominal del pagaré?***

$$Datos: D_R = 800{,}00 : Fómula : N = D \times D_R\left(D - D_R\right)^{-1}; \ Condición: D - D_R = 120 \Rightarrow$$

$$D = 120 + D_R \Rightarrow \ D = 120 + 800 = 920$$

$$N = 920 \times 800(920 - 800)^{-1} \Rightarrow \ N = 6.133{,}33$$

PROBLEMA 06.- ***Sabiendo que la diferencia entre el Descuento Comercial y el Descuento Racional es de Bs. 120,00en una letra de cambio girada a 90 días a la vista y con una tasa a Interés Simple del 12% anual; se pide obtener el Valor Nominal de esa letra de cambio.***

$$Datos: n = 90\,días = 0{,}25\,años; \ i = d = 0{,}12\,anual; Fómulas: N = D(dn)^{-1} \ y \ D_R = (D - D_R)(in)^{-1};$$

$$Condición: D - D_R = 120; \quad N = ?$$

$$D_R = 120(0{,}12 \times 0{,}25)^{-1} = 4.000{,}00 \Rightarrow \ D = D_R + 120 = 4.000 + 120 = 4.120 \Rightarrow \ N = 4.120(0{,}12 \times 0{,}25)^{-1}$$

$$\Rightarrow \ N = 137.333{,}33$$

PROBLEMA 07.- ***Un comerciante tiene una letra de cambio de Bs. 2.500,00 pagadera a 75 días, si lo descuenta comercialmente recibe Bs. 2.350,00 y si lo descuenta racionalmente recibirá Bs. 15,00 que si lo descontara comercialmente. ¿Qué tasa a Interés Simple se le aplicó para obtener el Valor Nominal de la letra de cambio.***

$$Datos: N = 2.500{,}00; \ n = 75\,días = 0{,}208333\,años; \ D = 2.350; \ Fórmula: \ i = (D - D_R)(nD_R)^{-1};$$

$$Condiciones: D - D_R = 15 \Rightarrow \ D_R = D - 15 = 2.335; \ d = i = ?$$

$$d = 15(0{,}208333 \times 2.335)^{-1} \Rightarrow \ d = 0{,}0308\,diario \ ó \ d\% = 3{,}08\%\,diario$$

PROBLEMA 08.- ***El precio de contado de una maquinaria es de Bs. 1.500,00. Al momento de la negociación se cancela la mitad de su costo y el resto mediante 4 letras de cambio de igual Valor Nominal pagaderas trimestralmente. ¿Cuál será el valor de cada letra de cambio, si la operación se realizó aplicando una tasa de Descuento Comercial simple del 9% anual?***

$$Costo\ de\ Contado = 1.500;\ \ Cuota\ Inicial = 750 \Rightarrow\ \ Deuda\ a\ Cancelar = 750 \Rightarrow\ \ A = 750;$$

$$d = 0,09\ anual = 0,0075\ mensual;$$

$$Fórmula: A = N(i - dn)\ y\ N = A(1 - dn)^{-1};\ \ N = ?$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A \Rightarrow\ N(1 - 0,0075 \times 3) + N(1 - 0,0075 \times 6) + N(1 - 0,0075 \times 9) + N(1 - 0,0075 \times 12) =$$

$$0,9775N + 0,9550N + 0,9325N + 0,9100N = 750 \Rightarrow\ 3,775N = 750 \Rightarrow\ N = 198.68$$

***PROBLEMA 09.-* Se debe un pagaré de Bs. 5.000,00 pagadero en 9 meses. El deudor luego de transcurridos 3 meses de haberlo firmado resuelve abonar con cargo al mismo Bs. 2.000,00. Si la operación se realiza a una tasa de Descuento Comercial simple del 10%, y el resto de la deuda se desea cancelar mediante 2 letras de igual monto para ser pagadas de manera trimestral durante los últimos 6 meses, ¿cuánto será el Valor Nominal de las 2 letras?**

$$Datos: N = 5000,00;\ \ n = 9\ meses = 0,75\ años;\ d = 0,10;\ Fórmula:\ A = N(1 - dn)$$

$$Se\ actualiza\ el\ monto\ del\ pagaré\ a\ los\ tres\ meses: A_1 = 5.000(1 - 0,10 \times 0,5) = 4.750 \Rightarrow$$

$$A_2 = 4.750 - 2.000 = 2.750;\ teniendo\ el\ valor\ actual\ con\ la\ cancelación\ realizada\ a\ los$$

$$tres\ meses\ se\ hace: A_{BD} + A_{CD} = A_2 \Rightarrow\ N(1 - 0,10 \times 0,25) + N(1 - 0,10 \times 0,50) = 2.750 \Rightarrow$$

$$0,975N + 0,950N = 2.750 \Rightarrow\ 1,925N = 2.750 \Rightarrow\ N = 1.428,57$$

***PROBLEMA 10.-* Se solicita un préstamo de Bs. 10.000,00 a una entidad bancaria para ser cancelado mediante 4 cuotas trimestrales de Bs. 2.500,00 cada una. Si la entidad bancaria descuenta Bs. 1.000,00, determinar ¿qué tasa de Interés Simple se aplicó para aprobar el préstamo?**

$$Datos: N_i = 2.500,00;\ \ Préstamo = 10.000;\ n = cuatro\ cuotas\ trimestrales;\ D = 1.000;$$

$$Fómula: A = N(1 - dn);\ \ Condición: A = 10.000 - 1.000 = 9.000$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A; \Rightarrow\ 2.500\left[(1 - 0,25d) + (1 - 0,5d) + (1 - 0,75d) + (1 - d)\right] = 9.000 \Rightarrow$$

$$4 - 2,5d = 9.000 \times 2.500^{-1} \Rightarrow\ -2,5d = -0,4 \Rightarrow\ d = 0,16\ ó\ d\% = 16\%$$

***PROBLEMA 11.-* Un acreedor tiene en su poder 3 letras de cambio; la primera por Bs. 2.500,00 a 45 días, la segunda por Bs. 2.000,00 a 90 días y la tercera por Bs. 1.500,00 a 135 días. El deudor propone una negociación para consolidar las 3 letras en una sola para cancelarla en 90 días. Con la aceptación del acreedor de las letras, la operación se realiza a una tasa de Descuento Simple del 15% anual. ¿Cu{al será el valor letra única de cambio tanto en Descuento Comercial como Descuento Racional?**

$$Datos: N_1 = 2.500; n_1 = 0{,}125\,años; N_2 = 2.000;\ n_2 = 0{,}25\,años; N_3 = 1.500; n_3 = 0{,}375\,años;$$
$$G = ?;\ k = 0{,}25;\ \ i = d = 0{,}15\ anual$$

$$Descuento\ Comercial: G = \frac{N_1(1-dn_1)+N_2(1-dn_2)+N_3(1-dn_3)}{1-dk}$$

$$G = \left[2.500(1-0{,}15\times 0{,}125)+2.000(1-0{,}15\times 0{,}25)+1.500(1-0{,}15\times 0{,}375)\right](1-0{,}15\times 0{,}25)^{-1} \Rightarrow$$

$$G = 6.019{,}48$$

$$Descuento\ Racional:\ G = \left[\frac{N_1}{1+in_1}+\frac{N_2}{1+in_2}+\frac{N_3}{1+in_3}\right](1+ik)$$

$$G = \left[2.500(1+0{,}15\times 0{,}125)^{-1}+2.000(1+0{,}15\times 0{,}25)^{-1}+1.500(1+0{,}15\times 0{,}375)^{-1}\right](1+0{,}15\times 0{,}25) \Rightarrow$$

$$G = 6.019{,}39$$

<u>PROBLEMA 12.-</u> Se debe una letra de cambio de Bs. 5.000,00 pagadera en 9 meses. Se estudia consolidarla en 3 letras trimestrales de cambio de igual valor nominal comenzando a cancelarlas al finalizar el tercer mes de los 9 meses establecidos en la letra de cambio original. Si la tasa a Descuento Simple que se aplicará a la operación es del 12% anual; ¿cuál será el monto de cada letra de cambio tanto a Descuento Comercial como a Descuento Racional?

$$Datos: G_1 = G_2 = G_3 = G; k_1 = 0{,}25\,años;\ k_2 = 0{,}5\,años; k_3 = 0{,}75\,años; G = 5.000;\ k = 0{,}25;$$
$$i = d = 0{,}12\ anual;\ \ N = 5.000;\ \ n = 0{,}75\ años$$

$$Descuento\ Comercial: G_1(1-dk_1)+G_2(1-dk_2)+G_3(1-dk_3) = N(1-dn)$$

$$\Rightarrow\ G\left[3-(0{,}12\times 0{,}25+0{,}12\times 0{,}5+0{,}12\times 0{,}75)\right] = 5.000(1-0{,}12\times 0{,}75) \Rightarrow \frac{141}{50}G = 4.550$$

$$G = 1.613{,}48$$

$$Descuento\ Racional: G_1(1+ik_1)^{-1}+G_2(1+ik_2)^{-1}+G_3(1+ik_3)^{-1} = N(1+in)^{-1} \Rightarrow$$

$$G\left[(1+0{,}12\times 0{,}25)^{-1}+(1+0{,}12\times 0{,}5)^{-1}+(1+0{,}12\times 0{,}75)^{-1}\right] = 5.000(1+0{,}12\times 0{,}75)^{-1} \Rightarrow$$

$$2{,}831701G = 4.587{,}155963 \Rightarrow\ G = 1.619{,}93$$

<u>PROBLEMA 13.-</u> Una entidad bancaria tiene un cliente que debe dos letras de cambio, una de Bs. 1.500,00 con vencimiento a 45 días, y otra de Bs. 1000,00con vencimiento a 120 días. Se acuerda darle un año para pagar mediante cuotas bimestrales iguales a Descuento Simple siendo la tasa del 12% anual. ¿Cuál sería el pago de cada cuota bimestral?

$$Datos: N_1 = 1.500; n_1 = 0{,}125\,años; N_2 = 1.000;\; n_2 = 0{,}333333\,años;$$
$$Cuotas\ bimestrales\ G = ?;\quad i = d = 0{,}12\ anual$$
$$Descuento\ omercial:$$
$$G(1-dk_1)+G(1-dk_2)+G(1-dk_3)+G(1-dk_4)+G(1-dk_5)+G(1-dk_6)=$$
$$N_1(1-dn_1)+N_2(1-dn_2) \Rightarrow G\left[6-(dk_1+dk_2+dk_3+dk_4+dk_5+dk_6)\right]=$$
$$1.500(1-0{,}12\times 0{,}125)+1.000(1-0{,}12\times 0{,}333333) \Rightarrow$$
$$G\left[6-0{,}12(0{,}166667+0{,}333333+0{,}5+0{,}666667+0{,}833333+1)\right]=2.437{,}50$$
$$5{,}58G = 2.437{,}50 \Rightarrow G = 436{,}83$$

PROBLEMA 14.- ***¿Cuál sería el Vencimiento Medio de 3 letras de cambio de monto: Bs. 1.200,00; Bs. 1.500,00y Bs. 2.000,00 cada una, las cuales vencen a los 45, 90 y 135 días respectivamente, estando a una tasa de Descuento Simple del 9% anual?***

$$Datos: N_1 = 1.200; n_1 = 45\,días; N_2 = 1.500;\; n_2 = 90\,días; N_3 = 2.000;\; n_3 = 135\,días;$$
$$n = \frac{N_1n_1+N_2n_2+N_3n_3}{N_1+N_2+N_3} = \frac{1.200\times 45+1.500\times 90+2.000\times 135}{1.200+1.500+2.000} \Rightarrow n = 98\ días$$

PROBLEMA 15.- ***Se tienen 3 letras cuya suma de sus Valores Nominales es de Bs. 1.278,00. Se descuentan a una tasa de Descuento Simple del 8% anual. Los tiempos de vencimientos de cada letra de cambio es a 5, 7 y9 meses respectivamente. El Descuento Comercial de la primera vale tanto como él de las otras 2 juntas más Bs. 4,00 y el Descuento Comercial de la segunda es de Bs. 13,30 menos que él de las otras dos juntas; ¿cuál será el Valor Nominal de cada letra?***

$$Datos: n_1 = 5\,meses;\; n_2 = 7\,meses;\; n_3 = 9\,meses;\;\; d = i = 0{,}08\,anual = 0{,}006667\,mensual;$$
$$Condiciones: N_1+N_2+N_3 = 1.278{,}00;\;\; D_1 = D_2+D_3+4;\;\; D_2 = D_1+D_3-13{,}30$$
$$\frac{D_1}{dn_1}+\frac{D_2}{dn_2}+\frac{D_3}{dn_3} = \frac{D_1}{0{,}006667\times 5}+\frac{D_2}{0{,}006667\times 7}+\frac{D_3}{0{,}006667\times 9} = 30D_1+21{,}43D_2+16{,}67D_3 = 1.278{,}00$$
$$\left\{\begin{array}{rl} 30D_1+21{,}43D_2+16{,}67D_3 = 1.278{,}00 & (1)\\ D_1 - D_2 - D_3 = 4 & (2)\\ -D_1 + D_2 - D_3 = -13{,}30 & (3)\end{array}\right. \;\Bigg|\; \begin{array}{l} Sumando\ (2)\ y\ (3)\ resulta\ que: -2D_3 = 4-13{,}3 \Rightarrow \\ D_3 = 4{,}65;\ sustituyendo\ este\ valor\ en\ (1)\ queda: \\ 30D_1+21{,}43D_2 = 1.200{,}48\end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{l} 30D_1+21{,}43D_2 = 1.200{,}48\\ D_1 - D_2 = 8{,}65 \Rightarrow D_1 = D_2+8{,}65 \Rightarrow 30(D_2+8{,}65)+21{,}43D_2 = 1.200{,}48 \Rightarrow\end{array}\right.$$
$$51{,}43D_2 = 940{,}98 \Rightarrow D_2 = 18{,}30;\; por\ lo\ que: D_1 = 18{,}30+8{,}65 \Rightarrow D_1 = 26{,}95$$
$$N_1 = \frac{26{,}95}{0{,}006667\times 5} \Rightarrow N_1 = 808{,}46;\;\; N_2 = \frac{18{,}30}{0{,}006667\times 7} \Rightarrow N_2 = 392{,}12;\; N_3 = \frac{4{,}65}{0{,}006667\times 9} \Rightarrow N_3 = 77{,}50$$

***PROBLEMA 16.-* Tenemos una deuda de Bs. 2.000,00 que se vence dentro de 4 meses. Se desea cancelarla en dos partes: Bs. 1.400,00 a 5 meses. Determinar por cuantos días debemos anticipar el resto de Bs. 600,00 para que haya compensación de intereses, si la operación se realiza a una tasa simple del 12% anual.**

$Datos: N = 2.000;\ n = 4\,meses; G_1 = 1.400;\ n_1 = 5\,meses;\ G_2 = 600;\ n_2 = ?;$

$Condición: Nn = G_1 n_1 + N_2 n_2$

$$n_2 = \frac{Nn - G_1 n_1}{N_2} \Rightarrow n_2 = \frac{2.000 \times 4 - 1.400 \times 5}{600} \Rightarrow n_2 = \left(5/3\right) meses = 50\ días$$

***PROBLEMA 17.-* Se tiene una deuda de Bs. 3.000,00 que se vence en 5 meses. Si se cancela Bs. 1.200,00, 3 meses antes de vencerse; Bs. 800,00, dos meses antes de su vencimiento y Bs. 600,00, mes y medio después de su vencimiento. Determinar la fecha de vencimiento de los restantes Bs. 400,00 en que se cancelaría el total de la deuda.**

$Datos: N = 3.000;\ n = 5\,meses; G_1 = 1.200;\ n_1 = 2\,meses;\ G_2 = 800;\ n_2 = 3\,meses;\ G_3 = 600;$

$n_3 = 6{,}5\,meses;\ G_4 = 400;\ n_4 = ?\quad Condición: Nn = G_1 n_1 + G_2 n_2 + G_3 n_3 + G_3 n_3 + G_4 n_4$

$$n_4 = \frac{Nn - (G_1 n_1 + G_2 n_2 + G_3 n_3)}{G_4} \Rightarrow n_2 = \frac{3.000 \times 5 - (1.200 \times 2 + 800 \times 3 + 600 \times 6.5)}{400} \Rightarrow$$

$$n_2 = \left(63/4\right) meses = 473\ días$$

PROBLEMA 18.- *Se obtiene un préstamo de Bs 10.000; para cancelarlo en 15 meses, junto con sus intereses, a una tasa de interés simple del 15% anual. Transcurridos 9 meses, se descuenta el documento en una entidad bancaria a una tasa de descuento simple del 12% anual. Se pide determinar: a) ¿Cuánto recibió en efectivo el acreedor del documento al descontarlo? Y b) ¿Cuál es la tasa de la ganancia de la entidad bancaria al cambiar el documento?*

$Datos: C = 10.000;\ n = 15\,meses;\ i = 0{,}15\,anual = 0{,}0125\,mensual\ n_1 = 9\,meses;$

$d = 0{,}12\,anual = 0{,}01\,mensual;\quad Fórmulas: M_N = C(1 + in);\ A = M_N(i - dn)\ y\ i = \left(I/Cn\right)$

$a)\ M_N = 10.000(1 + 0{,}0125 \times 15) = 11.875{,}00;\ por\ lo\ que\ A = 11.875(1 - 0{,}01 \times 6) \Rightarrow A = 11.162{,}50$

$b)\ En\ una\ inversión\ de\ Bs\ 10.000\ en\ 9\ meses = 0{,}75\ años\ se\ ha\ ganado\ Bs\ (11.162{,}5 - 10.000) = 1.162{,}50;$

$$luego; i = \frac{1.162{,}50}{10.000 \times 0{,}75} \Rightarrow i = 0{,}1550\ o\ i\% = 15{,}50\%$$

Título II

Interés segunda parte

Capítulo III

Interés Compuesto

1. **Definiciones fundamentales.-**

1.1. **Interés Compuesto.-** Es la operación de la matemática financiera que nos permite que en períodos establecidos de antemano, los intereses del capital colocado se le vayan sumando, creando un nuevo capital y así sucesivamente hasta que finalice el lapso de tiempo que dure la colocación de ese dinero.

1.2. **Capitalización.-** Es el proceso de sumar los intereses al capital cada vez que se liquidan al finalizar el período establecido para la misma.

1.3. **Período de capitalización.-** Lapso al final del cual se capitalizan los intereses para seguir produciendo nuevos intereses.

1.4. **Frecuencia de capitalización.-** Número de veces por año, que los intereses se acumulan al capital.

1.5. **Interés compuesto discreto.-** Es cuando el interés a capitalizar se realiza en un período de capitalización de un año.

1.6. **Interés compuesto fraccionado.-** Es cuando el interés a capitalizar se realiza en períodos de capitalización menores a un año (días, meses, bimestre, trimestre, cuatrimestre, semestre).

1.7. **Interés continuo.-** Es cuando el interés a capitalizar se realiza en períodos de capitalización infinitamente pequeños.

1.8. **Interés compuesto inusual.-** Es cuando el interés a capitalizar se realiza en períodos de capitalización mayores a un año (bianual, trianual, etc.). Este es un tipo de interés que no se usa en la matemática financiera por no ser práctico para los beneficios que debe generar un dinero invertido; sin embargo matemáticamente es calculable.

2.- **Símbolos, definiciones y fórmula.-**

2.1. **Símbolos.-**

C = Capital inicial.

i = Tanto por uno anual o tasa efectiva.

I% = Tanto por ciento anual.

n = Lapso de tiempo que permanece colocado un capital.

I = Interés compuesto acumulado.

J_m = Tasa nominal de interés.

J_m / m = Tasa nominal proporcional de interés.

m = Frecuencia de capitalización.

M = Capital inicial más los intereses acumulados (monto)

S = Factor de capitalización. Valor futuro de un capital cuando el capital inicial es de Bs. 1

V^{nm} = Factor de actualización. Valor actual de un capital futuro de Bs. 1 a interés compuesto.

2.2. Definiciones y fórmulas.-

2.2.1. **Interés compuesto discreto.-**_Como se informó anteriormente este es un interés donde el período de capitalización es de un año, por lo que su frecuencia será anual y por lo tanto m = 1 y J_m = i, y el monto y sus variables componentes se calcula por:

$$M = C(1+i)^n$$

$$C = M(1+i)^{-n}, C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1, i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1,$$

$$n = \frac{\log M - \log C}{\log(1+i)}$$

Factor de acumulación: $S = (1+i)$

Factor de actualización: $V = (1+i)^{-1}$

2.2.2. **Interés compuesto fraccionado.-**

Es el interés que presenta períodos de capitalización menores a un año. Diario, m=360 (en la práctica no se usa); semanal, m=52 (en la práctica poco se usa); mensual, m=12; bimestral, m=6; trimestral, m=4; cuatrimestral, m=3, semestral, m=2 y anual, m=1.

Según mi óptica este es el interés compuesto más empleados por lo tanto recomiendo prestar especial atención a los problemas donde haya que utilizarse todos los instrumentos de cálculo y elementos de análisis donde se aplique este tipo de interés compuesto.

$$C = \frac{M}{\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{mn}}$$

$$M = C\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{mn}$$

$$Jm = m\left[\left(\frac{M}{C}\right)^{1/mn} - 1\right]$$

$$n = \frac{\log M - \log C}{m \log\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)}$$

Factor de acumulación: $S_m = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)$

Factor de actualización: $V_m = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{-1}$

3.-Las diversas tasas de interés

3.1.- Tasa efectiva de interés.- Es la tasa de interés, a la que realmente produce interés un capital en un período determinado. Por convención se acepta como período normal el que abarca un lapso de un año.

3.2.-Tasa nominal de interés.-_Son tasas de interés que corresponden a un determinado período, en el cual los intereses se abonan al comenzar o finalizar el mismo.

3.3.- Tasa proporcional de interés.- Son tasas en las cuales los intereses se abonan más de una vez durante el lapso pactado para la tasa nominal. Ese abono se hace al capital, dependiendo de la frecuencia de capitalización acordada para el lapso de tiempo que dure colocado el mismo.

3.4.- Tasa equivalente de interés.- Por su importancia en el cálculo de las Matemáticas financiera debe tenerse un conocimiento preciso sobre esta tasa**, las cuales establecen una equivalencia entre tasas que correspondiendo a períodos de capitalización "diferentes", producen intereses "iguales" para capitales y tiempos iguales.**

$$i_e = (1+i)^{1/m} - 1$$

4.- <u>Interés continuo.-</u>

En realidad es un interés compuesto donde los períodos de capitalización son infinitamente pequeños.

$$M = Ce^{in}$$

$$C = Me^{-in}$$

$$i = \frac{\log M - \log C}{n \log e}$$

$$n = \frac{\log M - \log C}{i \log e}$$

5.-<u> Tasa de interés simple equivalente a una tasa de interés compuesto o viceversa.-</u>

$$i_s = \frac{\left(1+i_c\right)^n - 1}{n}, \quad i_c = \left(1+i_s n\right)^{1/n} - 1$$

5.- **Interés o beneficio obtenido a interés compuesto.**

Partiendo del capital

$$I = C\left[\left(1+\frac{Jm}{m}\right)^{nm} - 1\right]$$

Partiendo del monto

$$I = M\left[1 - \left(1+\frac{J_m}{m}\right)^{-nm}\right]$$

Problemas de Interés Compuesto

Problema 01.- *Determinar el capital que invertido en 5 años a una tasa nominal anual del 15%, con capitalización trimestral, produjo un monto de Bs. 1.500,00.*

Problema 02.- *Determinar la tasa nominal anual con capitalización semestral a la cual se invirtió un capital de Bs. 800,00, si en 42 meses se retiró del banco un total de Bs. 1.243,19.*

Problema 03.- *Determinar el tiempo que estaría invertido un capital de Bs. 750,00 a una tasa de interés nominal anual del 12% con capitalización bimestral para que produzca un monto de Bs. 1.071,18.*

Problema 04.- *Determinar el interés producido por un capital invertido a una tasa de interés nominal anual del 12%, con capitalización cuatrimestral que en 4 años produjo un monto de Bs. 2.800,00.*

Problema 05.- *Un capital en 45 meses produce un beneficio de Bs. 2.246,84, a una tasa de interés nominal anual del 15% con capitalización mensual. ¿Cuál fue el monto de ese capital?*

Problema 06.- *Se tiene un capital de Bs. 600,00, colocado a una tasa nominal anual del 9%, durante 30 meses determinar y comentar los montos si los períodos de capitalización son: a) Anual, b) Semestral, c) Cuatrimestral d) Trimestral, e) Bimestral y f) Mensual.*

Problema 07.- *Se colocan en una entidad bancaria Bs. 850,00 a una tasa nominal semestral del 5% con capitalización trimestral. Por razones de emergencia pasado 3 años, 12 meses y 26 días se tiene que retirar el dinero colocado, determinar el monto retirado.*

Problema 08.- *¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse un capital a una tasa nominal anual del 12% con capitalizaciones: a) Semestrales y b) Trimestrales.*

Problema 09.- *Se han invertido Bs. 5.000,00, durante 8 años, a la tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización bimestral. Dicha tasa será aumentada en un 1% cada 2 años. Determinar el monto a retirar al finalizar el período de colocación.*

Problema 10.- *Se han invertido Bs. 2.500,00 a una tasa nominal anual del 12%, con capitalización trimestral durante 8 años. Durante ese período se hicieron los siguientes retiros: a) Al finalizar el tercer año Bs. 300,00, b) Al finalizar el quinto año Bs. 500,00 y c) Al finalizar el séptimo año Bs. 400,00. Determinar el monto a retirar.*

Problema 11.- *¿Qué capital será necesario invertir a una tasa nominal anual del 9%, con capitalización trimestral para que a los 5 años se retiren Bs. 400,00 y a los 8 años se obtenga un monto de Bs. 1.000,00.*

Problema 12.- *El monto de un capital a los 36 meses de su inversión fue de Bs. 6.543,23 y a los 6 años Bs. 8.562, 76. Determinar el capital y la tasa nominal anual si sabemos que se aplicó una capitalización mensual.*

Problema 13.- *Se han invertido Bs. 2.000,00 al 12% nominal anual con capitalización semestral, durante 30 meses. Si al final de cada período de capitalización se retira la mitad de los intereses ganados en dicho período. Determinar el monto a retirar al finalizar el tiempo de la inversión.*

Problema 14.- *El monto producido por un capital, a los 3 años de su inversión, ascendió a Bs. 6.543,23y a los 6 años a Bs. 8.562,76. Si se le aplicó una tasa nominal anual con capitalización mensual; determinar el capital invertido y la tasa nominal utilizada.*

Problema 15.- *Se han invertido dos capitales, el primero de Bs. 1.200, al 12% nominal anual con capitalización semestral, y el segundo de Bs. 1.000,00 al 16% nominal anual con capitalización trimestral. ¿Cuánto tiempo tardarán en igualarse en sus montos?*

Problema 16.- *¿Cuál será el monto que producirá un capital de Bs. 500,00, colocado a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización continua durante 5 años?*

Problema 17.- *Determinar la tasa de interés simple equivalente a una tasa del 12% nominal anual con capitalización trimestral durante 4 años.*

Problema 18.- *Determinar la tasa nominal anual, con capitalización bimestral, equivalente a una tasa del 15% anual a interés simple durante 5 años.*

Capítulo IV

Descuento y Vencimiento Común a Interés Compuesto

1.- Descuento.-Todas las consideraciones y conceptos formulados en el Capítulo II son válidos para el estudio del Descuento y Vencimiento Común a Interés Compuesto; sin embargo es importante aclarar que el descuento comercial es preferible aplicarlo a interés compuesto cuando el lapso de tiempo a aplicar al negocio es bastante largo, ya que interés simple el descuento puede llegar a superar a el monto o valor futuro lo cual es un absurdo. Convengamos entonces que en lapsos pequeños de tiempos utilicemos el descuento racional a interés compuesto y en lapso grandes el descuento comercial a interés compuesto.

2.- <u>Descuento Comercial.</u>

$$\mathbf{D = N - A,} \qquad D = N\left[1 - \left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{nm}\right], D = A\left[\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{-nm} - 1\right]$$

2.1- Valor actual en función del valor nominal o viceversa en descuento comercial.

$$\mathbf{A = N\,(1 - d_m\ /m)^{nm}, \qquad N = A\,(1 - d_m\ /m)^{-nm}}$$

3.-<u>Descuento Racional.</u>

$$\mathbf{D_R = N - A,} \qquad D_R = N\left[1 - \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{-nm}\right], D_R = A\left[\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{nm} - 1\right]$$

3.1 Valor actual en función del valor nominal o viceversa en descuento racional.

$$\mathbf{N = A\,(1 + J_m\ /\ m)^{nm}\ , \qquad A = N\,(1 + J_m\ /\ m)^{-nm}}$$

4.- <u>Relaciones entre las diferentes tasas.-</u>

SÍMBOLOS.

i = Tasa efectiva de descuento racional. J_m = Tasa nominal de descuento racional

d = Tasa efectiva de descuento comercial. d_m = Tasa nominal de descuento comercial

4.1.- Tasa de interés efectiva en función de la tasa de descuento efectiva o viceversa.

$$i = \frac{d}{1 - d}, \qquad d = \frac{i}{1 + i}$$

4.2.- Tasa de interés efectiva en función de la tasa de interés nominal o viceversa.

$$i = \left(1+\frac{J_m}{m}\right)^m - 1, \qquad J_m = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$$

4.3.- Tasa de interés efectiva en función de la tasa de descuento nominal o viceversa.

$$i = \left[\frac{1}{\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^m}\right] - 1, \qquad d_m = m\left[1 - \frac{1}{(1+i)^{1/m}}\right]$$

4.4.- Tasa de interés nominal en función de la tasa de descuento efectiva o viceversa.

$$J_m = m\left[\frac{1}{(1-d)^{1/m}} - 1\right], \qquad d = 1 - \left[\frac{1}{\left(1+\frac{J_m}{m}\right)^m}\right]$$

4.5.- Tasa de interés nominal en función de la tasa de descuento nominal o viceversa.

$$J_m = \frac{m d_m}{m - d_m}, \qquad d_m = \frac{m J_m}{m + J_m}$$

4.6.- Tasa de descuento efectiva en función de la tasa de descuento nominal o viceversa.

$$d = 1 - \left(1-\frac{d_m}{m}\right)^m, \qquad d_m = m\left[1 - (1-d)^{1/m}\right]$$

SÍMBOLOS

i = Tasa efectiva de descuento racional. J_m = Tasa nominal de descuento racional

d = Tasa efectiva de descuento comercial. d_m = Tasa nominal de descuento comercial

Tasa de Interés Efectiva en función de la tasa de Interés Nominal	$i = \left(1+\frac{J_m}{m}\right)^m - 1$	**Tasa de Interés Nominal en función de la tasa de Interés Efectiva**	$J_m = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$
Tasa de Interés Efectiva en función de la tasa de Descuento Efectiva	$i = \frac{d}{1-d}$	**Tasa de Descuento Efectiva en función de la tasa de Interés Efectiva**	$d = \frac{i}{1+i}$
Tasa de Interés Efectiva en función de la tasa de Descuento Nominal	$i = \left(1-\frac{d_m}{m}\right)^{-m} - 1$	**Tasa de Descuento Nominal en función de la tasa de Interés Efectiva**	$d_m = m\left[1-(1+i)^{-1/m}\right]$
Tasa de Interés Nominal en función de la tasa de Descuento Efectiva	$J_m = m\left[(1-d)^{-1/m} - 1\right]$	**Tasa de Descuento Efectiva en función de la tasa de Interés Nominal**	$d = 1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-m}$
Tasa de Interés Nominal en función de la tasa de Desc. Nominal	$J_m = md_m\left(m-d_m\right)^{-1}$	**Tasa de Desc. Nominal en función de la tasa de Interés Nominal**	$d_m = mJ_m\left(m+J_m\right)^{-1}$
Tasa de Descuento Efectiva en función de la tasa de Desc. Nominal	$d = 1-\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^m$	**Tasa de Descuento Nominal en función de la tasa de Desc. Efectiva**	$d_m = m\left[1-(1-d)^{1/m}\right]$

5.- <u>Vencimiento Común.-</u>

Al igual que en interés simple en el interés compuesto debe mantenerse el principio del equilibrio de la equivalencia es decir:” la suma de los valores actuales de las obligaciones primarias, deberá ser igual a la suma de los valores actuales de las obligaciones consolidadas.

Como el descuento comercial o exterior no suele emplearse en la práctica comercial, salvo que se plantee nos limitaremos a utilizar en nuestros problemas utilizaremos el descuento a interés compuesto matemático, racional o interior, entonces:

$$G_1V^{K_1} + G_2V^{K_2} + \cdots = N_1V^{n_1} + N_2V^{n_2} + \cdots$$

5.1.- <u>Vencimiento medio.-</u>

El vencimiento medio es la igualdad que se tiene entre los valores nominales de las de las deudas primarias y el valor nominal de la deuda consolidada, por lo que:

$$n = \frac{\log P - \log\left(N_1V^{n_1} + N_2V^{n_2} + \cdots\right)}{\log\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)}, \qquad P = \sum_{t=1}^{h} N_h$$

Como se podrá observar el vencimiento medio es el lapso de tiempo en la cual se puede cancelar la suma de las deudas establecidas.

En el caso del vencimiento común que es la generalidad de los problemas presentados el valor de G no el más que el valor de P en el vencimiento medio, el cual es un caso especial del vencimiento común.

<u>*Problemas de Descuento y Vencimiento Común*</u>

<u>*a Interés Compuesto*</u>

<u>Problema 01.-</u> *El Valor Actual de una letra de cambio descontada 42 meses antes de su vencimiento, asciende a Bs. 1.464,68. Determinar su Valor Nominal tanto en Descuento Comercial como en Descuento Racional si se le aplica una tasa de descuento nominal anual del 9%, con capitalización trimestral.*

<u>Problema 02.-</u> *El Valor Nominal de una letra de cambio es de Bs. 3.000,00. Determinar el Valor Actual, tanto en Descuento Comercial como en Descuento Racional si se descuenta 30 meses antes de su* *vencimiento estando colocada a una tasa de descuento nominal anual del 12 %, con capitalización cuatrimestral.*

Problema 03.- *Determinar ¿a cuánto montará el Descuento Comercial y el Descuento Racional? de una letra de cambio cuyo Valor Nominal es de Bs. 2.500,00 descontada 9 meses antes de su vencimiento y que fue concertada a una tasa de descuento nominal anual del 15% con capitalización semestral.*

Problema 04.- *Determinar el Descuento Comercial y el Descuento Racional de una letra de cambio cuyo Valor Actual es de Bs. 2.145,85 descontada 9 meses antes de su vencimiento a una tasa de descuento nominal anual del 12% con capitalización bimestral.*

Problema 05.- *Una letra de cambio con un Valor Nominal de Bs. 1.200,00 ha sido descontada 18 meses antes de su vencimiento a una tasa de descuento nominal anual del 15% con capitalización semestral. Aplicando el Descuento Comercial y el Descuento Racional, determinar; ¿qué cantidad de dinero será descontado?*

Problema 06.- *Determinar: a) La tasa de descuento nominal comercial que corresponde a una tasa de descuento racional efectiva del 11%, con capitalización cuatrimestral, b) La tasa de descuento efectiva comercial correspondiente a una tasa de descuento nominal racional del 13%, con capitalización trimestral y c) La tasa de descuento nominal racional correspondiente a la tasa nominal comercial del 12% con capitalización bimestral*

Problema 07.- *Un préstamo se realizó y se estableció el monto de Bs. 2.000,00 en una letra de cambio con vencimiento a 3 años, la cual fue grabada con una tasa de interés del 15% capitalizable trimestralmente (los interese se calculan al vencimiento de la deuda). Pasado 2 años se desea descontar la letra de cambio del préstamo. Si al descuento se aplica una tasa de interés del 18% anual nominal capitalizable; ¿cuál será el dinero efectivo que se entregará si se aprueba la operación?*

Problema 08.- *Una deuda está establecida mediante tres letras de cambio, la primera por Bs. 200,00, pagadera en 4 meses; la segunda por Bs. 280,00, pagadera a 8 meses y la tercera por Bs.500,00 pagadera a 18 meses. Se piensa consolidar esa deuda mediante dos giros de igual valor nominal cada uno con vencimiento a 9 meses y 12 meses respectivamente, si a la operación se le aplica una tasa de interés nominal anual del 12% con capitalización mensual, determinar el valor nominal de cada giro.*

Problema 09.- *Se tiene una deuda por Bs. 1.500,00 a 8 meses y otra por Bs. 2.500,00 a 15 meses. Se plantea consolidar esa deuda en dos letras de cambio una por Bs. 1.200,00 pagadera a 6 meses y la otra pagadera a 1 año. Si la operación se realiza a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitaliza cuatrimestral, ¿cuál será el valor nominal de la segunda letra de cambio?*

Problema 10.- *Se negocia un terreno por Bs. 25.000,00, pagándose el 40% en el momento del acuerdo sobre la operación, quedándose de acuerdo de pagar el resto de la deuda mediante 8 pagos trimestrales, firmando letras de cambio de igual valor. Si la negociación se formalizó aplicando una tasa de interés nominal anual del 12% con capitalización semestral, a Descuento Comercial y a Descuento Racional, ¿cuál sería el monto de cada letra?*

Problema 11.- *Un comerciante tiene tres compromisos de pagos con una entidad bancaria, la primera por Bs. 4000,00, vencida hace 3 meses; la segunda por Bs. 6000,00 que se vence tal día como hoy y la tercera por Bs. 8000,00, que se vence dentro de 9 meses. Se acuerda con el acreedor consolidar la deuda en una sola letra con vencimiento a 6 meses a partir de la fecha actual. Si se aplica una tasa nominal anual del 9% con capitalización bimestral, ¿cuál será el valor nominal de la letra de cambio consolidada?*

Problema 12.- *Tal día como hoy se deben 6 giros de igual valor nominal de Bs. 200,00, cada uno pagaderos cuatrimestralmente. Se acuerda consolidarlos en una sola letra pagadera a los 6 meses del vencimiento de toda la deuda, aplicando una tasa de interés nominal anual del 10%, con capitalización trimestral. ¿Cuál será el valor nominal de la nueva letra?*

Problema 13.- *Se deben 3 giros, el primero por Bs. 2.000,00 a 9 meses, el segundo por Bs. 3.500,00 a 15 meses y el tercero por Bs. 3.000,00 a 21 meses. Determinar el Vencimiento Común de un giro de Bs. 7.900,00 que se acordó para consolidar la deuda de los 3 giros anteriores si la operación se formalizó a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización trimestral.*

Problema 14.- *Determinar el Vencimiento Medio de 3 giros, el primero de Bs. 500,00 a 5 meses, el segundo de Bs. Segundo de Bs. 800,00 a 10 meses y el tercero por Bs. 1.200,00 a 15 meses, aplicando una tasa de interés nominal anual del 10%, con capitalización semestral.*

Problema 15.- *Determinar: a) La tasa de descuento racional efectiva que corresponde a una tasa de descuento comercial nominal anual del 10% con capitalización, b) La tasa de descuento racional nominal que corresponde a una tasa de descuento comercial efectiva del 12% con capitalización trimestral y c) La tasa de descuento comercial nominal que corresponde a una tasa de descuento racional nominal del 8% con capitalización bimestral.*

Título III

Rentas

Capítulo V

Rentas de imposición y rentas de amortización

1. **Concepto y definiciones básicas.-**Comúnmente se entiende por renta o anualidad a una sucesión de pagos que se realizan periódicamente con el fin de formar un capital (rentas de imposición o capitalización) o cancelar una deuda (rentas de amortización o cancelación).

Hablar de anualidad desde el punto de vista de las matemáticas financiera no significa compromisos anuales, sino que pudiendo ser anuales también pueden ser compromisos de otro tipo de períodos de tiempo (mensuales, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, semestrales, etc.)

Si periódicamente se pagara una cuota, renta o anualidad que excediera el monto de interés a pagar en ese período, el remanente se utiliza para amortizar el capital cedido en préstamo, si fuera una renta de amortización y en este mecanismo es que se han basado para diseñar los diferentes sistemas de amortización de préstamos.

2.- Términos básicos a utilizar en las anualidades o rentas.

2.1.-Período de la renta (p).- Tiempo comprendido entre dos pagos consecutivos de renta (mensual, bimestral, trimestral, etc.)

2.2.- Plazo de la renta (n).- Representa el tiempo establecido para pagar todos los compromisos convenidos desde el primero hasta el último inclusive.

2.3.- Término o cuota de la renta (R o R_p).- Es cada uno de los pagos efectuados (cuotas). El pago o término de una renta se llama anualidad sí el pago es anual y cuota o pagos si la cancelación se hace en frecuencias o períodos de tiempos menores a un año.

2.4.- Tasa de una anualidad, término o renta (i o J_m).- Es la tasa unitaria de interés compuesto empleada para calcular el valor de la cuota o anualidad que se deberá pagar periódicamente.

2.5.- Valor futuro o monto de una renta (M).- Valor que se obtiene al final del plazo establecido para la renta en la negociación convenida.

2.6.- Valor actual o presente de una renta (A).- Es el valor que tendrá una renta o anualidad anterior al vencimiento del plazo total de misma, con el fin de ser negociada o vendida.

2.7.- Renta de imposición o de capitalización.- Cuando una renta se conviene para formar un capital.

2.8.- Renta de amortización o de cancelación.- Cuando una renta se conviene para cancelar una deuda o un compromiso.

3.- <u>Clasificación de las rentas o anualidades,-</u>

De acuerdo a los intereses, pueden ser simples (cuando el período pago coincide con el período de capitalización) o generales (cuando el período de pago no coincide con el período de capitalización).

De acuerdo al tiempo, pueden ser ciertas (Cuando los pagos se inician y culminan en fechas fijas, conocidas, definidas, perfectamente determinadas. Cuando el plazo es limitado son rentas ciertas a plazos, y si es ilimitados son rentas perpetuas) o eventuales, contingentes o inciertas (Cuando la fecha del primer pago, o del último pago, o ambas, no se conocen o no se han fijado de antemano, depende de sucesos imprevistos).

De acuerdo al momento de pago, pueden ser ordinarias o vencidas (Cuando los pagos se efectúan a su vencimiento, al concluir cada período) o anticipadas (Cuando los pagos se realizan al inicio de cada período)

De acuerdo a la iniciación, pueden ser inmediatas (Cuando los pagos deben ocurrir inmediatamente al concluir los períodos formalizados en el convenio) o diferidas (Cuando se pospone la realización de los cobros o pagos).

NOTA. Ver clasificación en página siguiente.

Como en este curso vamos a desarrollar nuestros problemas referidos solamente a las rentas ciertas, vamos a continuación a desarrollar una clasificación muy especial en esa dirección:

Contingencia de su disponib.	**Plazo de la renta**	**Variabilidad de los térm.**	**Capitalización contra pago**	**Época de cancelación**	**Disfrute de la renta**
	Temporales	Constantes	Enteras	Vencidas	Inmediatas
Rentas ciertas					Anticipadas
	Perpetúas	Variables	Fraccionarias	Adelantadas	Diferidas

4.- <u>Cuadro general de la clasificación de las rentas</u>

Las rentas se pueden clasificar en función de los elementos que intervienen:

4.1.- Según la definición de sus términos:

4.1.1.- Renta cierta: Cuando los términos de la renta y su duración son conocidos.

4.1.2.- Renta aleatoria: Cuando algunos de los anteriores elementos no es conocido.

4.2.- Según la cuantía de los términos:

4.2.1.- Renta constante: Cuando la cuantía de los capitales es siempre la misma.

4.2.2.-Renta variable: Cuando la cuantía de los capitales no es siempre la misma.

4.3.- Según su vencimiento:

4.3.1.-Renta anticipada o prepagable: Cuando sus términos vencen al principio de cada periodo. O dicho de otro modo, si el inicio de la operación coincide con el vencimiento de un capital.

4.3.2.- Renta vencida o postpagable: Cuando sus términos vencen al final de cada periodo. O dicho de otro modo, que desde el inicio de la operación hasta el vencimiento de un capital transcurre un periodo.

4.4.- Según su duración:

4.4.1. Renta temporal: Cuando la duración es finita.

Fórmulas más usuales en el cálculo de las Rentas

Tipos de Rentas / Casos	Rentas de Imposición o de Capitalización	Rentas de Amortización o de Cancelación
Caso 01 **p = m = 1**	$M = \frac{R\left[(1+i)^{n} - 1\right]}{i}$ $R = \frac{iM}{(1+i)^{n} - 1}$	$A = \frac{R\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$ $R = \frac{iA}{1 - (1+i)^{-np}}$
Caso 02 **p=m>1** **p>m>1** **p>m=1** **m>p=1**	$M = \frac{R_p\left[(1+i_e)^{np} - 1\right]}{i_e}$ $R_p = \frac{i_e M}{(1+i_e)^{np} - 1}$	$A = \frac{R_A\left[1 - (1+i_e)^{-np}\right]}{i_e}$ $R_p = \frac{i_e A}{1 - (1+i_e)^{-np}}$

4.4.2.- Renta perpetua o indefinida: Cuando la duración es infinita.

4.5.- Según el punto de valoración:

4.5.1.- Renta inmediata: Cuando el inicio o final de la operación financiera coincide con el inicio o final de la renta.

4.5.2.-Renta no inmediata: Cuando el inicio de la operación es anterior al inicio de la renta o cuando el final de la operación es posterior al final de la renta.

4.- Concepto de equivalencia.

Tasa de oportunidad.- Esla tasa que se puede obtener un ente en sus operaciones normales en un mercado financiero ilimitado y perfecto.

Importante la siguiente hipótesis: a) Rentas de inversión," todos los términos producirán la misma tasa de interés". b) Rentas de amortización ,"todos los términos producirán la misma tasa de interés y, los amortizados, serán reinvertidos a esa misma tasa".
Cuando se nos presenta una anualidad o renta dividida en p cuotas, en donde la fecha de cancelación de las cuotas no coincida con la de los períodos de capitalización de la misma, puede ser transformada en entera, **aplicando una tasa equivalente, que coincide con las fechas de capitalización de la renta.**

$$i_e = \left(1 + J_m / m\right)^{m/p} - 1$$, para p =m >1, m>p>1, p>m=1 o m>p=1

5.- Cálculo del monto del valor futuro o actual de una renta de imposición o de amortización, inmediata temporales VENCIDAS de términos constantes (ITV de TC)

6.- Cálculo del tiempo.

Casos	Rentas de Imposición	Rentas de Amortización
Caso 01 **p=m=1**	$n = \dfrac{\log(iM + 1) - \log R}{\log(1+i)}$	$n = \dfrac{\log R - \log(R - iA)}{\log(1+i)}$
Caso 02 **p=m>1; p>m>1** **p>m=1 o m>p=1**	$n = \dfrac{\log(i_e M + R_p) - \log(R_p)}{p \log(1+i_e)}$	$n = \dfrac{\log(R_p) - \log(R_p - i_e A)}{p \log(1+i_e)}$

7.- Cálculo de la tasa de una renta.-

7.1- Rentas de imposición o de capitalización.

Algunas veces el cálculo debe hacerse por tanteo, y se procede de la manera siguiente: a) Se aísla el miembro de la ecuación donde se encuentra la tasa. b) Luego se procede a obtener el valor del miembro de la ecuación donde no está la variable de la tasa. c) Se le van dando valores a la tasa hasta que el valor de comparación este por abajo o por arriba del valor que se está obteniendo, se afinan los valores lo más que se pueda y se procede a realizar la respectiva interpolación. El menor de los valores antes del cambio más el valor obtenido de la interpolación resulta la tasa que se busca.
También se puede calcular por una fórmula de aproximación obtenida por el matemático inglés **Bayly** para Imposiciones Temporales Vencidas de Términos constantes (ITV de TC):

$$\boxed{i = h\left[\frac{12+(n+1)h}{12+2(n+1)h}\right]}, \qquad donde: \boxed{h = \left[\frac{M}{Rn}\right]^{\frac{2}{n-1}} - 1}; \ \textbf{Para tasas efectivas}.$$

Combinando esta fórmula con la que convierte la tasa efectiva en tasa nominal podemos obtener una expresión que nos permita calcular la tasa nominal:

$$\boxed{J_m = m\left[\left(\frac{\nabla_{(Im.)}h^2}{\nabla_{(Im)}h}\right)^{1/m} - 1\right]}, \qquad donde: \boxed{\begin{aligned}\nabla_{(Im.)}h^2 &= (1+n)h^2 + 2(7+n)h + 12\\ \nabla_{(Im)}h &= 2(h+hn+6)\end{aligned}};$$

Para tasas nominales

$$\boxed{h = \left(\frac{M}{n \times R}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1}; \qquad donde: \boxed{R = p \times R_p}$$

Como se obtiene una muy buena aproximación a la tasa que se busca obtener, para lograrla se recomienda: **a)** Con la tasa obtenida calcular el monto de la renta si este resulta igual al monto original, esa es la tasa; **b)** Si resulta mayor se disminuye la tasa de valor entero en valor entero y se va obteniendo los respectivo montos, si la tasa es entera se logrará un monto igual al monto original; **c)** Si el último monto obtenido resultase menor que el monto original, entonces la tasa buscada en tanto por ciento es decimal, por lo tanto en la última tasa donde el monto fue mayor al monto original se va disminuyendo de 0,25 en 0,25 hasta lograr la igualdad o una óptima aproximación, o bien interpolar para lograr esa optimalización.

7.2.- Rentas de amortización o de cancelación.

Se puede seguir los pasos del tanteo como se explicó anteriormente, sin embargo el matemático ingles **Bayly** también obtuvo para este tipo de renta una fórmula que nos hace mucho más sencillo el cálculo.

$$\boxed{i = h\left[\frac{12-(n-1)h}{12-2(n-1)h}\right]}, \qquad donde: \boxed{h = \left[\frac{Rn}{A}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1};$$

Para tasas efectivas

Al igual que en la Renta de Imposición combinando esta fórmula con la que convierte la tasa efectiva en tasa nominal podemos obtener una expresión que nos permita calcular la tasa nominal:

$$\boxed{J_m = m\left[\left(\frac{\nabla_{(Am.)}h^2}{\nabla_{(Am)}h}\right)^{1/m} - 1\right]}, \quad donde: \boxed{\begin{aligned}\nabla_{(Am.)}h^2 &= (1-n)h^2 + 2(7-n)h + 12\\ \nabla_{(Am)}h &= 2(h - hn + 6)\end{aligned}};$$

Para tasas nominales

$$\boxed{h = \left(\frac{n \times R}{A}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1}; \quad donde: \boxed{R = p \times R_p}$$

Al igual que en la Renta de Imposición, se obtiene una muy buena aproximación a la tasa que se busca obtener. Para lograrla se recomienda: **a)** Con la tasa obtenida calcular el Valor Actual de la renta si este resulta igual al Valor Actual original, esa es la tasa; **b)** Si resulta mayor se aumenta la tasa de valor entero en valor entero y se va obteniendo los respectivo Valores Actuales, si la tasa es entera se logrará un Valor Actual igual al Valor Actual original; **c)** Si el último Valor Actual obtenido resultase menor que el Valor Actual original, entonces la tasa buscada en tanto por ciento es decimal, por lo tanto en la última tasa donde el monto fue mayor al monto original se va aumentando de 0,25 en 0,25 hasta lograr la igualdad o una óptima aproximación, o bien interpolar para lograr esa optimalización.

8.- <u>Cálculo del monto del valor futuro o actual de una renta de imposición o de amortización, inmediata temporales ADELANTADAS de términos constantes (ITA de TC)</u>

Estas rentas se diferencian de las inmediatas temporales vencidas en que se cancela intereses por un período más. Es decir sobre el período que se paga por adelantado.
Para obtener los valores de una renta de imposición o de amortización, inmediata temporal adelantada de términos constantes, si es a una tasa efectiva o donde m = 1, bástese con multiplicar cada fórmula de dos de los casos las rentas de imposición o amortización, inmediata temporal vencida de términos constantes por (1+i) y en el caso de rentas divididas por cuotas se multiplica el resto de los dos casos por $\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{m/p}$

8.1- **Tasa de interés para una renta de Imposición Temporal Adelantada de Términos Constantes.**

$$\text{Según } \textbf{Bayly}: \; i = h\left[\frac{12 + (n-1)h}{12 + 2(n-1)h}\right], donde: h = \left[\frac{Rn}{A}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1$$

Resumen de las Fórmulas más usuales en el cálculo de las Rentas		
Tipos de Rentas / Casos	**Rentas de Imposición o de Capitalización**	**Rentas de Amortización o de Cancelación**
Caso 01 **p = m = 1**	$M = \frac{R\left[(1+i)^{n} - 1\right]}{i}$ $R = \frac{iM}{(1+i)^{n} - 1}$	$A = \frac{R\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$ $R = \frac{iA}{1 - (1+i)^{-np}}$
Caso 02 **p=m>1** **p>m>1** **p>m=1** **m>p=1**	$M = \frac{R_p\left[(1+i_e)^{np} - 1\right]}{i_e}$ $R_p = \frac{i_e M}{(1+i_e)^{np} - 1}$	$A = \frac{R_p\left[1 - (i+i_e)^{-np}\right]}{i_e}$ $R_p = \frac{i_e A}{1 - (1+i_e)^{-np}}$
Cálculo del Tiempo	**Rentas de Imposición o de Capitalización**	**Rentas de Amortización o de Cancelación**
Caso 01 **p=m=1**	$n = \frac{\log(iM+1) - \log R}{\log(1+i)}$	$n = \frac{\log R - \log(R - iA)}{\log(1+i)}$
Caso 02 **p=m>1; p>m>1** **p>m=1 o m>p=1**	$n = \frac{\log(i_e M + R_p) - \log(R_p)}{p\log(1+i_e)}$	$n = \frac{\log(R_p) - \log(R_p - i_e A)}{p\log(1+i_e)}$
Tasas	**Tasa de Interés Nominal en función de la Tasa de Interés efectiva**	**Tasa de Interés Equivalente**
	$J_m = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$	$i_e = \left(1 + J_m/m\right)^{m/p} - 1$
Cálculo de las tasas	**Rentas de Imposición o de Capitalización**	**Rentas de Amortización o de Cancelación**
Fórmulas de Bailey **(Efectiva)**	$i = h\left[\frac{12 + (n+1)h}{12 + 2(n+1)h}\right], donde: h = \left[\frac{M}{Rn}\right]^{\frac{2}{n-1}} - 1$	$i = h\left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h}\right], donde: h = \left[\frac{Rn}{A}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1$

Cálculo de las tasas	Rentas de Imposición o de Capitalización	Rentas de Amortización o de Cancelación
fórmulas de Bailey **(Nominal)**	$J_m = m\left[\left(\frac{\nabla_{(Im.)}h^2}{\nabla_{(Im)}h}\right)^{1/m} - 1\right]$ $\nabla_{(Im.)}h^2 = (1+n)h^2 + 2(7+n)h + 12$; $\nabla_{(Im)}h = 2(h + hn + 6)$ $h = \left(\frac{M}{n \times R}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1$; $R = p \times R_p$	$J_m = m\left[\left(\frac{\nabla_{(Am.)}h^2}{\nabla_{(Am)}h}\right)^{1/m} - 1\right]$, $\nabla_{(Am.)}h^2 = (1-n)h^2 + 2(7-n)h + 12$; $\nabla_{(Am)}h = 2(h - hn + 6)$ $h = \left(\frac{n \times R}{A}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1$; $R = p \times R_p$

Resumen de las Fórmulas más usuales en el cálculo de las Rentas aplicando Tablas

Tipos de Rentas / Casos	Rentas de Imposición o de Capitalización	Rentas de Amortización o de Cancelación
Caso 01 **p = m = 1**	$M = \frac{R\left[S^n_{(1/1)} - 1\right]}{i}$ $R = \frac{iM}{S^n_{(1/1)} - 1}$	$A = \frac{R\left[1 - V^n_{(1/1)}\right]}{i}$ $R = \frac{iA}{1 - V^n_{(1/1)}}$
Caso 02 **p=m>1** **p>m>1** **p>m=1** **m>p=1**	$M = R_p\left(\frac{S^{np}_{(m/p)} - 1}{i_e}\right)$ $R_p = \frac{i_e M}{S^{np}_{(m/p)} - 1}$	$A = R_p\left(\frac{1 - V^{np}_{(m/p)}}{i_e}\right)$ $R_p = \frac{i_e A}{1 - V^{np}_{(m/p)}}$

<u>Problema 01.-</u> *Determinar el monto formado por Imposiciones semestrales vencidas de Bs. 1.200,00 durante 4 años a la tasa nominal anual del 12% con capitalización trimestral.*

$Datos: R/P = 1.200,00;\ p = 2;\ n = 4;\ J_m = 0,12;\ m = 4;$

$Fórmulas:\ para\ m > p > 1 \Rightarrow\ M = \dfrac{R/p\left[(1+i_e)^{np} - 1\right]}{i_e};\ i_e = \left(1 + J_m/m\right)^{p/m} - 1;\ según\ Tablas: i_{e(J_m=12\%;p=2;m=4)} = 0,0609$

$Desarrollo: np = 4 \times 2 = 8;\quad 1+i_e = 1,0609 \Rightarrow\ (1+i_e)^{np} = 1,0609^8 = 1,604706 \Rightarrow\ M = \dfrac{1.200,00(1,604706 - 1)}{0,0609} \Rightarrow$

$$\boxed{M = 11.915,39}$$

__Problema 02.-__ *Determinar el tiempo necesario para formar un capital de Bs. 15.000,00, en base a Imposiciones anuales vencidas de Bs. 1.800,00, a una tasa efectiva del 15% anual con capitalizaciones anuales..*

$Datos: R = 1.800,00;\ M = 15.000;\ p = 1;\ n = ?;\ i = 0,15;\ m = 1;$

$Fórmulas:\ para\ m = p = 1 \Rightarrow\ n = \dfrac{\log(iM + R) - \log R}{\log(1+i)};$

$Desarrollo: n = \dfrac{\log(0,15 \times 15.000,00 + 1.800,00) - \log 1.800,00}{\log 1,15} \Rightarrow\ \boxed{n = 5,802225\ años}$

Como se verá resulto una parte decimal o racional y para problemas de rentas, éstas tienen que determinarse en períodos de tiempos enteros o decimales que coincidan con las frecuencias de tiempos en que deban pagarse las cuotas periódicas, por lo tanto en casos como el que se nos presenta se pueden realizar dos operaciones de modificación: ***a) Modificación Tiempo-Cuota y b) Modificación Tiempo- Monto***

a) Modificación Tiempo-Cuota.-

a) Si asumimos bajar el tiempo a 5 años y dejar el mismo monto habría que aumentar las cuota entonces: $R = \dfrac{0,15 \times 15.000,00}{1,15^5 - 1} \Rightarrow\ \boxed{R = 2.221,73\ bolívares\ para\ 5\ años}$

b) Si asumimos subir el tiempo a 6 años y dejar el mismo monto habría que aumentar las cuota entonces: $R = \dfrac{0,15 \times 15.000,00}{1,15^6 - 1} \Rightarrow\ \boxed{R = 1.713,55\ bolívares\ para\ 6\ años}$

b) Modificación Tiempo-Monto

a) Si disminuimos el tiempo a 5 años entonces:

$$M = \frac{1.800,00(1,15^5 - 1)}{0,15} \Rightarrow\ \boxed{M = 12.136,29}$$

a) Si aumentamos el tiempo a 6 años entonces:

$$M = \frac{1.800,00(1,15^6 - 1)}{0,15} \Rightarrow\ \boxed{M = 15.756,73}$$

c) Cancelación de una parte complementaria

Como no se modifica el tiempo entonces se plantea que: $\boldsymbol{n = n_1 + n_2}$*, donde* $\boldsymbol{n_1}$ *es la parte entera y* $\boldsymbol{n_2}$ *la fracción de un período.*

Finalización del plazo entero de la renta:
Hagamos X la cantidad de dinero a pagar para completar el pago del monto:

$$X = \frac{R\left[(1+i)^{n_2} - 1\right]}{i} = \frac{1.800,00\left(1,15^{0,802225} - 1\right)}{0,15} \Rightarrow \boxed{X = 1.423,77} \Rightarrow$$

$$M = \frac{R\left[(1+i)^{n_1} - 1\right](1+i)^{n_2}}{i} + X = 12.136,29 \times (1,15)^{0,802225} + 1.423,77 \Rightarrow \boxed{M = 15.000,00}$$

Este valor de X complementario se puede pagar después al concluir el tiempo fraccionario como una cuota especial, es decir a los 9 meses y 19 días, o se puede pagar con la última cuota (En nuestro caso la quinta) actualizando su valor para el momento, es decir: $A_X = \frac{X\left[1 - (1+i)^{-n_2}\right]}{i} = \frac{1.423,77 \times \left(1 - 1,15^{-0,802225}\right)}{0,15} \Rightarrow \boxed{M = 1006,73}$

El cual se puede cancelar a parte en el momento de pagar la última cuota cargada a la misma.

Problema 03.- *Determinar la cuota anual o anualidad entera y la cuota de Imposición mensual vencida para que en 8 años a una tasa de interés nominal anual del 10% con capitalización bimestral, formen un monto Bs.85.000,00.*

$$Datos: M = 85.000,00;\ p = 1\ y\ p = 12;\ n = 8;\ J_m = 0,10;\ m = 6;$$

$$Fórmulas: para\ m > p = 1\ y\ p > m > 1 \Rightarrow R/P = \frac{i_e M}{(1+i_e)^{np} - 1};\ i_e = \left(1 + J_m/m\right)^{p/m} - 1;$$

$$según\ Tablas: i_{e(J_m=10\%;p=1;m=2)} = 0,1025\ y\ i_{e(J_m=10\%;p=12;m=2)} = 0,008165$$

$$Desarrollo: R = \frac{0,1025 \times 85.000}{1,1025^{8\times 1} - 1} \Rightarrow \boxed{R = 7.365,53}\ y\ R/p = \frac{0,008165 \times 85.000}{1,008165^{8\times 12} - 1} \Rightarrow \boxed{R/p = 586,71}$$

Problemas Resueltos de Rentas

Problema 04.- *Se desea formar un capital de Bs. 40.000,00 en base a 30 pagos cuatrimestrales vencidas de Bs. 710,84 a una tasa de interés del 12% nominal anual con capitalización trimestral. Al cancelar la décimo octava cuota se desea cancelar una cantidad de dinero, que sumada con las anualidades canceladas formen el capital previsto al finalizar el plazo de la Renta. Se pide determinar: a) La cantidad de dinero a cancelar para complementar las anualidades y b) El valor Actual de la Renta al cancelar la décimo octava anualidad.*

$Datos: M = 40.000,00;\ p = 3;\ n = 10\ años;\ J_m = 0,12;\ m = 4;$

$$Fórmulas:\ para\ m > p > 1 \Rightarrow \frac{R}{P} = \frac{i_e M}{\left(1+i_e\right)^{np} - 1};\quad A = \frac{\frac{R}{p}\left[1 - \left(1+i_e\right)^{-np}\right]}{i_e};\quad i_e = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{p/m} - 1;$$

$$M = C\left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{n \times m};\quad según\ Tablas: i_{e\left(J_m = 12\%;\, p=3;\, m=4\right)} = 0,040199\ y\ S_{m\left(J_m = 12\%;\, m=4\right)} = 1,03$$

$Desarrollo: \frac{R}{p} = \frac{0,040199 \times 40.000}{1,040199^{10 \times 3} - 1} \Rightarrow \boxed{R = 710,84}$; *al cancelar la décimo octava cuota el dinero la suma de las cuotas canceladas a la fecha sería un capital que definiría el monto a cancelar para completar el fondo; entonces:* $C_B = 710,84 \times 18 = 12.795,12$. *Faltarían 4 años para completar el fondo.*

$a)\ M = C_B \times S_m^{n \times m} = 12.795,12 \times 1,03^{4 \times 4} \Rightarrow \boxed{M = 20.532,41}$

$b)\ A = \frac{710,84 \times \left[1 - 1,040199^{-12}\right]}{0,040199} \Rightarrow \boxed{A = 6.663,59}$

<u>Problema 05.-</u> *Determinar la tasa nominal anual con capitalización semestral de una Renta de Imposición I.T.V. de T.C. si en 10 años en base al pagos de cuotas trimestrales de Bs.375,oo; su monto ascendió a Bs.33.076,42.*

$Datos: M = 33.076,42;\ p = 4;\ n = 10\ años;\ m = 2;\ \frac{R_A}{p} = 375,00$

$$Fórmulas: J_m = \left(\frac{M}{M'}\right) \times J'_m;\quad J'_m = m\left[\left(\frac{\nabla_I h^2}{\nabla_I h}\right)^{1/m} - 1\right];\quad \nabla_I h^2 = \left(1+n\right)h^2 + 2\left(7+n\right)h + 12;\quad \nabla_I h = 2\left(h + hn + 6\right)$$

$$h = \left[\frac{M}{nR_A}\right]^{\frac{2}{n-1}} - 1;\quad R_A = p \times R_p;\quad R_p = \frac{R_A}{P};\quad i_e = \left(1 + \frac{J'_m}{m}\right)^{m/p} - 1;\quad M' = \frac{R_p\left[\left(1+i_e\right)^{np} - 1\right]}{i_e}$$

$$Desarrollo: R_A = 4\times 375 = 1.500,00 \Rightarrow h = \left[\frac{33.076,42}{10\times 1.500}\right]^{\frac{2}{10-1}} - 1 = 0,192112 \Rightarrow$$

$$\nabla_I h^2 = 11\times 0,192112^2 + 34\times 0,192112 + 12 = 18,937785 \; y \; \nabla_I h = 2\left(0,192112 + 10\times 0,192112 + 6\right) = 16,226464$$

$$\Rightarrow J'_m = 2\left[\left(\frac{18,937785}{16,226464}\right)^{1/2} - 1\right] = 0,160641; \; ahora: i_e = \left(1 + \frac{0,160641}{2}\right)^{1/2} - 1 = 0,039385 \Rightarrow$$

$$M' = \frac{375\left(1,039385^{40} - 1\right)}{0,039385} = 35.122,10665 \Rightarrow J_m = \frac{33.076,42\times 0,160641}{35.122,10665} \approx 0,1513 \Rightarrow$$

$$\boxed{J_m = 0,15 \; o \; J_m\% = 15\%}$$

__Problema 06.-__ Determinar la tasa nominal anual con capitalización semestral de una Renta de Amortización I.T.V. de T.C. para cancelarla en 5 años en base al pagos de cuotas bimestrales de Bs.300,oo; si se recibió en el momento de la transacción un préstamo por Bs. 6.432,56.

$$Datos: A = 6.432,56; \; p = 6; \; n = 5 \text{ años}; \; m = 4; \; R_A/p = 300,00$$

$$Fórmulas: J_m = \left(\frac{A'}{A}\right)\times J'_m; \quad J'_m = m\left[\left(\frac{\nabla_c h^2}{\nabla_c h}\right)^{1/m} - 1\right]; \; \nabla_C h^2 = \left(1-n\right)h^2 + 2\left(7-n\right)h + 12; \; \nabla_C h = 2\left(h - hn + 6\right)$$

$$h = \left[\frac{nR_A}{A}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1; \; R_A = p\times R_p; \; R_p = \frac{R_A}{P}; \; i_e = \left(1 + \frac{J'_m}{m}\right)^{m/p} - 1; \; A' = \frac{R_p\left[1 - \left(1+i_e\right)^{-np}\right]}{i_e}$$

$$Desarrollo: R_A = 6\times 300 = 1.800,00 \Rightarrow h = \left[\frac{1.800\times 5}{6.432,56}\right]^{\frac{2}{5+1}} - 1 = 0,118458 \Rightarrow$$

$$\nabla_C h^2 = -4\times 0,118458^2 + 4\times 0,118458 + 12 = 12,417703 \; y \; \nabla_C h = 2\left(0,118458 - 5\times 0,118458 + 6\right) = 11,052336$$

$$\Rightarrow J'_m = 4\left[\left(\frac{12,417703}{11,052336}\right)^{1/4} - 1\right] = 0,118194; \; ahora: i_e = \left(1 + \frac{0,118194}{4}\right)^{2/3} - 1 = 0,019603 \Rightarrow$$

$$A' = \frac{300\left(1 - 1,019603^{-30}\right)}{0,019603} = 6.755,759125 \Rightarrow J_m = \frac{6.755,759125\times 0,118194}{6.432,56} \approx 0,1241 \Rightarrow$$

$$\boxed{J_m = 0,1241 \; o \; J_m\% = 12,41\%}$$

Problema 07.- *Determinar el monto del préstamo, si para su amortización más la cancelación de intereses a la tasa de interés nominal anual del 15%, con capitalización bimestral, se adquiere el compromiso de cancelar Bs. 600,00 por trimestres vencidos durante 5 años.*

$$Datos: R_p = 600,00;\ p = 4;\ n = 5 \text{ años};\ m = 6;\ J_m = 0,15$$

$$Fórmulas:\ i_e = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{m/p} - 1;\ A = \frac{R_p\left[1 - (1+i_e)^{-np}\right]}{i_e}$$

$$Desarrollo:\ i_{e(J_m=15\%;\, p=4;\, m=6)} = 0,037733 \Rightarrow A = \frac{600\left(1 - 1,037733^{-20}\right)}{0,037733} \Rightarrow \boxed{A = 8.320,36}$$

Problema 08.- *Para formar un fondo se invierten Bs 3.000,00 como aporte inicial, Bs 850,00 como aportes de anualidades vencidas a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización trimestral. Al transcurrir 2 años el fondo se incrementa con aportaciones semestrales vencidas de Bs. 1.200,00 durante 5 años restantes para la formación del fondo y además se consigue incrementar a partir de ese momento la tasa nominal anual a un 12% con capitalización trimestral para todos los movimientos de dinero. Determinar el monto.*

$$Datos: C_A = 3.000,00;\ R_{p(AB)} = 850,00;\ J_{m(AB)} = 0,09;\ m_{AB} = 4;\ n_{AB} = 2 \text{ años};$$
$$R_{p(BC)} = 1.200,00;\ J_{m(BC)} = 0,12;\ m_{BC} = 4;\ n_{BC} = 5 \text{ años},$$

$$Fórmulas: i_e = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{m/p} - 1;\ M = C\left(S_m\right)^{n \times m};\ M = \frac{\frac{R}{p}\left[(1+i_e)^{np} - 1\right]}{i_e}$$

$$Desarrollo: M_F = M_1 + M_2 + M_3$$

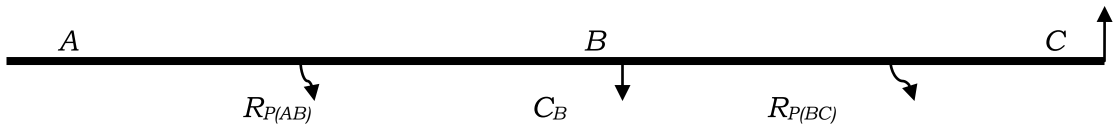
$$M_1 = \left(3.000 \times 1,0225^{2\times 4}\right) \times 1,03^{5\times 4} = 6.473,99; \qquad M_2 = \left[\frac{850\left(1,093083^{2\times 1} - 1\right)}{0,093083}\right] \times 1,03^{5\times 4} = 3.213,29$$

$$M_3 = \frac{1.200(1,0609^{5\times 2} - 1)}{0,0609} = 15.883,97 \Rightarrow M_F = 6.473,99 + 3.213,29 + 15.883,97 \Rightarrow \boxed{M_F = 25.571,25}$$

Problema 09.- *Suponga que se va a crear un fondo de Bs. 2.000.000,00; para atender requerimientos de atención médica de los obreros de una empresa de construcción. Se estima en 10 años el tiempo para disponer de él. En los primeros 6 años se harán aporte cuatrimestrales, momento en el cual debido a la inflación se resuelve aumentarlo a 2.500.000,00; ahora con aportes trimestrales. Si todas estas operaciones financieras se realizan a una tasa de interés nominal anual del 12% con capitalización semestral; ¿A cuánto montarán tantos los aportes cuatrimestrales de los primeros 6 años como los aportes trimestrales durante los últimos a años?*

$Datos: R_{p(AB)}=?;\ J_{m(AB)}=0,12;\ m_{AB}=2;\ p_{AB}=3;\ n_{AB}=6\ años;\ R_{p(BC)}=?;\ J_{m(BC)}=0,12;\ m_{BC}=2;$
$p_{BC}=4;\ n_{BC}=4\ años,$

$$Fórmulas: i_e=\left(1+\frac{J_m}{m}\right)^{m/p}-1;\ M=C\left(S_m\right)^{n\times m};\ R/P=\frac{i_e M}{\left(1+i_e\right)^{np}-1}$$



$$Desarrollo: i_{e\left(J_m=12\%;\, p_{AB}=3;\, m_{AB}=2\right)}=0,03961;\ R_{p(AB)}=\frac{0,03961\times 2.000.000,00}{1,03961^{10\times 3}-1}\Rightarrow \boxed{R_{p(AB)}=35.893,14}$$

Hasta el sexto año de iniciado la creación del fondo se han acumulado: $C_B=6\times 3\times 35.893,14=646.076,52$

$$M_1=646.076,52\times 1,06^{4\times 2}=1.029.747,82\Rightarrow M_2=2.500.000,00-1.029.747,82=1.420.252,18;$$

$$i_{e\left(J_m=12\%;\, p_{BC}=4;\, m_{BC}=2\right)}=0.029563\Rightarrow R_{p(BC)}=\frac{0,029563\times 1.420.252,18}{1,029563^{4\times 4}-1}\Rightarrow \boxed{R_{p(BC)}=70.703,17}$$

Problema 10.- *Un apartamento se negoció en las condiciones siguientes: a) Cuota inicial Bs.30.000,00, b) Cancelación de 3 cuotas extraordinarias de Bs.10.000,00 a 2, 4 y 6 años respectivamente a partir a de la fecha de las negociaciones y c) Firmando 15 giros por Bs. 2.500,00 cada uno para ser cancelados por anualidades vencidas, partiendo de la fecha de la compra. Al finalizar el último pago y suponiendo un rendimiento del dinero del 12% nominal anual con capitalización mensual; ¿En cuánto se valorizaría el apartamento?*

$Datos: C_{(Inicial)}=30.000;\ Cuotas\ Extraordinarias;\ C_1=C_2=C_3=10.000,00\rightarrow 2\ años, 4\ años\ y\ 6\ años;\ R=2.500,00$
$p=1;\quad 15\ pagos\ anuales\Rightarrow n=15;\ J_m=0,12;\ m=12;$

$$Fórmulas: i_e=\left(1+\frac{J_m}{m}\right)^{m/p}-1;\ M=C\left(S_m\right)^{n\times m};\ M=\frac{R\left[\left(1+e_i\right)^{np}-1\right]}{i_e}$$

$$Desarrollo: M_1=30.000\times 1,01^{15\times 12}=179.874,06;\quad M_2=10.000\times 1,01^{13\times 12}=47.220,91$$

$$M_3=10.000\times 1,01^{11\times 12}=37.189,59;\quad M_4=10.000\times 1,01^{9\times 12}=29.289,26$$

$$i_{e\left(J_m=12\%;\, p=1;\, m=12\right)}=0,126825;\ M_5=\frac{2.500\left(1,126825^{15\times 1}-1\right)}{0,126825}=98.478,21$$

$$M=\sum M_i=179.874,06+47.220,91+37.189,59+29.289,26+98.478,21=392.052,03$$

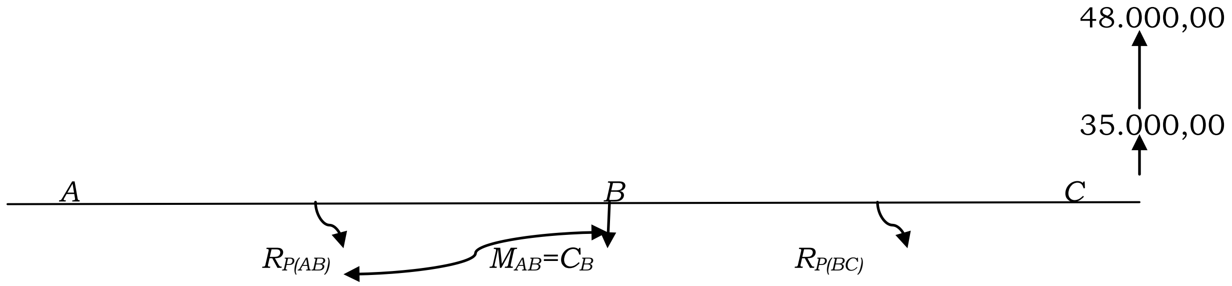
$$\boxed{El\ apartamento\ se\ valorizaría\ en\ Bs.\ 392.052,03}$$

Problema 11.- *Se desea formar un capital de Bs. 35.000,00 en 7 años por medio de Imposiciones semestrales vencidas de Bs.1.840,08; a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización bimestral. Al finalizar el segundo año se decidió que el capital a formar fuera de Bs. 48.000,00 y se conseguiría que las Imposiciones ganen el 12% nominal anual con capitalización mensual. Determinar el valor de las cuotas semestrales correspondientes a los últimos 5 años.*

$$Datos: M_i = 35.000,00\ R_{p(AB)} = 1.840,08;\ J_{m(AB)} = 0,09;\ m_{AB} = 6;\ p_{AB} = 2; n_{AB} = 2\ años; R_{p(BC)} = 2;$$

$$M_f = 48.000,00 J_{m(BC)} = 0,12;\ m_{BC} = 12;\ p_{BC} = 2;\ n_{BC} = 5\,años,$$

$$Fórmulas: i_e = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{m/p} - 1;\ M = C\left(S_m\right)^{n \times m};\ \ R_p = \frac{i_e M}{\left(1+i_e\right)^{np} - 1};\ M = \frac{R_p\left[\left(1+i_e\right)^{np} - 1\right]}{i_e}$$



$$Desarrollo: i_{e(J_m=9\%: p=2; m=6)} = 0,045678;\ \ i_{e(J_m=12\%: p=2; m=12)} = 0,061208;\ \ S_{m(J_m=12\%, m=12)} = 1,01$$

$$M_{AB} = \frac{1.840,08 \times \left(1,045678^{2\times 2} - 1\right)}{0,045678} = 7.880,16 = C_B \Rightarrow\ M_{BC} = 7.880,16 \times 1,01^{5\times 12} = 14.315,86$$

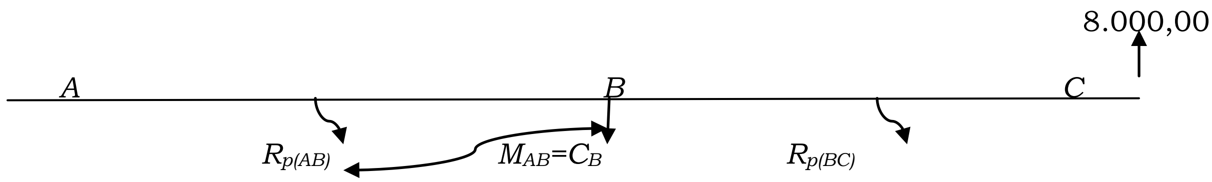
$$M_{p.c.} = 48.000,00 - 14.315,86 = 33.684,14 \Rightarrow\ R_{p(BC)} = \frac{0,061208 \times 33.684,14}{1,061208^{5\times 2} - 1} \Rightarrow \boxed{R_{p(BC)} = 2.541,09}$$

Problema 12.- *Debemos cancelar Bs. 8.000,00 dentro de 4 años para lo cual efectuamos depósitos por mensualidades vencidas de Bs. 150,00 a una tasa nominal anual del 12% con capitalización trimestral. Transcurrido el primer año, se comprueba que los depósitos más sus intereses, no alcanzarán para cubrir nuestra deuda por cuyo motivo se decide aumentar el valor de los depósitos. Determinar: a) Monto de los nuevos depósitos mensuales y b) Hallar el monto del depósito mensual correcto que hubiera sido necesario efectuar desde el primer momento.*

$$Datos: R_{p(AB)} = ?;\ J_{m(AB)} = 0,12;\ m_{AB} = 2;\ p_{AB} = 3; n_{AB} = 6\ años; R_{p(BC)} = ?;\ \ J_{m(BC)} = 0,12;\ \ m_{BC} = 2;$$

$$p_{BC} = 4;\ n_{BC} = 4\,años,$$

$$Fórmulas: i_e = \left(1 + \frac{J_m}{m}\right)^{m/p} - 1;\ M = C\left(S_m\right)^{n \times m};\ \ R/P = \frac{i_e M}{\left(1+i_e\right)^{np} - 1}$$



$$Desarrollo: i_{e\left(J_m=12\%:\,p=12;\,m=4\right)}=0,009902; \quad S_{m\left(J_m=12\%,\,m=4\right)}=1,03$$

$$M_{AB}=\frac{150,00\times\left(1,009902^{1\times 12}-1\right)}{0,009902}=1.901,34=C_B \Rightarrow M_{BC}=1.901,34\times 1,03^{3\times 4}=2.710,86$$

$$M_{p.c.}=8.000,00-2.710,86=5.289,14 \Rightarrow \boxed{M_{p.c.}5.289,14}$$

$$R_{p(BC)}=\frac{0,009902\times 5.289,14}{1,009902^{3\times 12}-1} \Rightarrow \boxed{R_{p(BC)}=123,01}$$

Problemas propuestos de Rentas

Problema 01.- *Determinar el monto formado por Imposiciones semestrales vencidas de Bs. 1.000,00 durante 5 años a la tasa nominal anual del 12% con capitalización trimestral.*

Problema 02.- *Determinar el tiempo necesario para formar un capital de Bs. 20.000,00, en base a Imposiciones anuales vencidas de Bs. 2.000,00, a una tasa efectiva del 10% anual con capitalizaciones anuales.*

Problema 03.- *Determinar el monto formado por Imposiciones mensuales vencidas de Bs. 500,00 durante 10 años a una tasa nominal de interés del 8% anual, con capitalización anual.*

Problema 04.- *Determinar la cuota anual o anualidad entera y la cuota de Imposición mensual vencida para que en 10 años a una tasa de interés efectiva del 8%, formen un monto Bs. 90.062,14.*

Problema 05.- *Determinar el monto formado por Imposiciones vencidas de Bs. 40.000,00 cada 4 años a una tasa de interés nominal del 8% anual, con capitalizaciones semestrales durante 20 años.*

Problema 06.- *Se desea formar un capital de Bs. 30.000,00 en base a 10 anualidades vencidas de Bs.20.70,88 a una tasa de interés del 8% anual efectiva. Al cancelar la sexta anualidad se desea cancelar una cantidad de dinero, que sumada con las anualidades canceladas formen el capital previsto al finalizar el plazo de la Renta. Se pide determinar: a) La cantidad de dinero a cancelar para complementar las anualidades y b) El valor Actual de la Renta al cancelar la sexta anualidad.*

Problema 07.- *Determinar la tasa efectiva anual de una Renta de Imposición I.T.V. de T.C. si en 10 años en base a anualidades de Bs.1.500,00; su monto ascendió a Bs. 21.371,99.*

Problema 08.- *Determinar el monto del préstamo, si para su amortización más la cancelación de intereses a la tasa de interés nominal anual del 12%, con capitalización mensual, se adquiere el compromiso de cancelar Bs. 3.000,00 por trimestres vencidos durante 5 años.*

Problema 09.- *Se ha decidido crear un fondo especial para jubilaciones para empleados, para lo cual se destinarán anualmente las cantidades de Bs. 2000,00, durante los primeros 5 años, Bs. 3.000,00 durante los siguientes 6 años y Bs. 4.000,00 para los últimos 4 años. Se espera conseguir una tasa de interés efectiva del 9% anual. Determinar el monto siendo vencidas las anualidades.*

Problema 10.- *Para formar un fondo se invierten Bs 300,00 como aportes de anualidades vencidas a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización mensual. Al transcurrir 3 años el fondo se incrementa con aportaciones semestrales vencidas de Bs. 180,00 durante 5 años más y se consigue incrementar al 12% nominal anual con las mismas capitalizaciones. Determinar el monto.*

Problema 11.- *Lady Gavidia convino con una entidad bancaria la creación de un fondo de Bs. 10.000,00 a un plazo de 10 años. Para iniciarlo hizo un depósito como aporte inicial de Bs. 1.500,00; acordando en depositar cuotas trimestrales a una tasa de interés nominal anual del 8% con capitalización bimestral. Transcurrido 6 años por ajustes económicos en el país las tasas fueron aumentadas a un 12% nominal anual, cambiando las capitalizaciones a trimestral y el fondo fue incrementado en Bs. 2.000,00. Si las tasas se aplican de acuerdo a los tiempos establecidos; ¿cuánto será el monto de la renta apagar antes y después de los 6 años?*

Problema 12.- *Un apartamento se negoció en las condiciones siguientes: a) Cuota inicial Bs.15.000,00, b) Cancelación de 3 cuotas extraordinarias de Bs.5.000,00 a 2, 4 y 6 años respectivamente a partir a de la fecha de las negociaciones y c) Firmando 10 giros por Bs. 2.500,00 cada uno para ser cancelados por anualidades vencidas, partiendo de la fecha de la compra. Al finalizar el último pago y suponiendo un rendimiento del dinero del 12% nominal anual con capitalización mensual, ¿en cuánto se valorizaría el apartamento?*

Problema 13.- *Para formar un capital se pueden realizar Imposiciones anuales vencidas de Bs. 12.000,00. Se desea fraccionar la anualidad en cuotas mensuales equivalentes. La inversión produce una tasa del 9% nominal anual con capitalización mensual. Determinar el valor de cada cuota mensual.*

Problema 14.- *Se desea formar un capital de Bs. 30.000,00 en 5 años por medio de Imposiciones semestrales vencidas de Bs.1.250,00, a una tasa de interés nominal anual del 9% con capitalización mensual. Al finalizar el segundo año se decidió que el capital a formar fuera de Bs. 40.000,00 y se conseguiría que las Imposiciones ganen el 12% nominal anual con capitalización mensual. Determinar el valor de las cuotas semestrales correspondientes a los últimos 3 años.*

Problema 15.- *Un terreno, con un costo de contado de Bs. 6.000,00 se ha comprado en las condiciones siguientes: a) Dos cuotas anuales de Bs. 1.000,00 para ser canceladas al finalizar el primer año y el segundo año respectivamente, b) Diez letras de cambio de igual Valor Nominal cada una, las cuales se cancelarán por semestres vencidos a partir de la fecha de la negociación.*

Si a la operación se le aplica una tasa nominal anual del 12% con capitalización mensual, ¿cuál será el Valor Nominal de cada letra de cambio?

Problema 16.- *El Valor Nominal de una letra de cambio es de Bs. 2.100,00 con vencimiento a 5 años y medio (No produce intereses).Para cancelarla se deposita en un banco Bs. 400,00 a una tasa nominal del 9% con capitalización semestral. Además se realizan 10 depósitos de cuotas semestrales vencidas de Bs. 80,00 cada una. Se pide determinar la cantidad complementaria a depositar junto con la última cuota para que los 5 años y medio se haga la cancelación de los Bs. 2.100,00.*

Problema 17.- *Debemos cancelar Bs. 5.000,00 dentro de 3 años para lo cual efectuamos depósitos por mensualidades vencidas de Bs. 100,00 a una tasa nominal anual del 9% con capitalización bimestral. Transcurrido el primer año, se comprueba que los depósitos más sus intereses, no alcanzarán para cubrir nuestra deuda por cuyo motivo se decide aumentar el valor de los depósitos. Determinar: a) Monto de los nuevos depósitos mensuales y b) Hallar el monto del depósito mensual correcto que hubiera sido necesario efectuar desde el primer momento.*

Problema 18.- *Debemos dos préstamos cuyas características son las siguientes: a) Vencimiento, 4 años; tasa nominal anual del 9% con capitalización mensual amortizable en base a cuotas trimestrales vencidas de Bs. 250,00 y b) Vencimiento, 3 años; tasa nominal anual del 10% con capitalización trimestral, amortizable en base a cuotas trimestrales vencidas de Bs. 500,00. Se acordó con el acreedor para consolidarlos y amortizarlos en 2 años aplicando una tasa de interés nominal anual del 10% con capitalización semestral. La amortización se hará en base a cuotas semestrales vencidas y constantes. Determinar el valor de cada cuota semestral.*

Problema 19.- *Determinar las tasas de interés que se aplicó a las Rentas siguientes: a) $M=1.196,94$; $n=5$ años; $R=250,00$ bolívares, $m=1$, b) $M=890,34$; $n=4$ años; $R/p=20,00$ bolívares, $m=12$; $p=12$ y c) $M=1.234,77$; $n=6$años; $R/p=60,00$ bolívares, $m=4$; $p=4$.*

Problema 20.- *Se estima que un terreno boscoso producirá Bs. 10.000,00 al año por su explotación en los próximos 15 años y entonces la tierra podrá venderse en Bs. 100.000,00. Encontrar el Valor Actual, suponiendo una tasa de interés nominal anua del 7% con capitalización semestral.*

Título IV

Amortización de Préstamos

Y

Proyectos de Inversión

Capítulo VI

Amortización de préstamos.

Cuando se recibe un dinero prestado hay el compromiso de pagar unos intereses por concepto del uso y disfrute de ese capital y a reembolsarlo en cancelaciones periódicas previamente acordadas. Para el pago de los intereses y el control de los reembolsos del capital prestado suele aplicarse entre muchos, uno de los tres sistemas siguientes: a) Sistema Francés (Amortización progresiva), b) Sistema Alemán (Amortización constante) y c) Sistema Americano (Fondo de amortización)

1.- Sistema Francés.- Es el sistema al que le vamos a dedicar mayor atención ya que es el más utilizado en el mercado financiero nacional.

Este sistema contempla el mantener siempre una renta constante, fija para cada período de pago de donde se deducirá una porción de la misma para cancelar los intereses acordados y la otra para amortizar el monto del préstamo aprobado.

Obtenido el monto constante de la renta a pagar en períodos de tiempos uniformes, se procede a deducir de ella el pago de intereses los cuales se toman a tasas de interés simple o tasas de interés equivalentes para cada pago en el tiempo, dependiendo del período de pago y la frecuencia de capitalización. Realizada la respectiva deducción del interés lo que queda se va restando a la deuda para amortizarla. Esta operación se realiza al vencerse cada período y así se procede de manera reiterada, procedimiento que ha dado diversos diseños de tablas para aplicar el Sistema Francés.

Para la obtención de los intereses a cancelar periódicamente se utiliza la tasa efectiva si el período de pago coincide con la frecuencia de capitalización, si esto no ocurre se utiliza la tasa equivalente según sea el caso

1.1-Términos usados en una tabla del Sistema Francés.-

I_x; identifica al interés de la deuda pendiente a pagar en el período de cancelación

T_x; Identifica a la parte de la renta que queda para amortizar la deuda pendiente, luego de deducir el interés a cancelar.

Z_x; Identifica a la deuda amortizada luego de realizar el último pago.

A_x; Identifica a la deuda pendiente a cancelar luego de deducirle el último

pago.

I_a; Identifica los intereses acumulados luego del último pago

F_x; Identifica al factor de amortización.

i_e; Identifica la tasa de equivalencia de frecuencia de capitalización a períodos de pago.

<u>Aplicación para capitalización igual a período de pago,(</u> $m = p$)

a) $$Ix = R_p \left[1 - \left(1 + {}^{Jm}\!/_{m}\right)^{-(nm-x+1)}\right]$$

b) $$Tx = R_p \left(1 + {}^{Jm}\!/_{m}\right)^{-(nm-x+1)}$$

c) $$Ax = R_p \left[\frac{1 - \left(1 + {}^{Jm}\!/_{m}\right)^{-(nm-x)}}{{}^{Jm}\!/_{m}}\right]$$

d) $$Zx = R_p \left[\left(1 + {}^{Jm}\!/_{m}\right)^{-(nm-x)}\right]\left[\frac{1 - \left(1 + {}^{Jm}\!/_{m}\right)^{-x}}{{}^{Jm}\!/_{m}}\right]$$

<u>Aplicación para capitalización diferente a período de pago</u> , $(m \neq p)$

a) $$Ix = R_p \left[1 - \left(1 + i_e\right)^{-(np-x+1)}\right]$$

b) $$Tx = R_p \left(1 + i_e\right)^{-(np-x+1)}$$

c) $$Ax = R_p \left[\frac{1 - \left(1 + i_e\right)^{-(np-x)}}{i_e}\right]$$

d) $Zx = R_p \left[\left(1+i_e\right)^{-(np-x)} \right] \left[\frac{1-\left(1+i_e\right)^{-x}}{i_e} \right]$

Términos adicionales

a) Ia = Iaa + Ix
b) Fx = (R/p)/Ax-1

2.- Sistema Alemán.- A diferencia del Sistema Francés donde las anualidades son constantes en este sistema los términos de la renta son variables. Cada cantidad se desglosa en dos partes, la primera constante e igual a la cuota parte del capital tomado en préstamo, parte que depende del número de pagos a realizar, y que se usa para amortizar dicho capital. La segunda una cantidad variable y se aplicará al pago de intereses sobre el saldo (deuda insoluta) del préstamo.

2.1.-Términos usados en una tabla del Sistema Alemán.-

t_c; amortización real constante de un período: **$t_c = D_o / p$,** donde p es el número de períodos de pago

D_x; identifica la deuda al iniciar el período: **$D_x = D_0 - (x - 1)\ t_c$**

I_x; identifica al interés variable de la deuda pendiente a pagar en el período de cancelación: **$I_x = (D_o - (x - 1)\ t_c)\ i$**

R_x; identifica la anualidad variable disponible: **$R_x = t_c + I_x = t_c + (A_o - (x - 1)\ t_c)\ i$,**
$R_x = R_1 - (x - 1)r$, de donde $r = I_{x+1} - I_x$

Z_x; Identifica a la deuda amortizada luego de realizar el último pago: **$Z_x = x\ t_c$**.

A_x; Identifica la deuda pendiente a cancelar luego de deducirle el último

Pago: **$A_x = D_x - t_c$**.

i_e; Identifica la tasa de equivalencia de frecuencia de capitalización a períodos de pago.

3.- Sistema Americano.- En este sistema o fondo de amortización, el deudor o prestatario cancelará, periódicamente, los intereses producidos por el capital recibido en préstamo, el cual se compromete a devolver en su totalidad, en la fecha de su vencimiento. Durante el plazo del préstamo se compromete a depositar periódicamente, anualidades o cuotas para crear un fondo, el cual, junto a sus intereses, deberá formar un monto que reembolsará el capital recibido en préstamo.

Como se puede observar las cantidades de dinero que el acreedor recibirá del deudor mientras dure el lapso de tiempo establecido para cancelar el préstamo, serán únicamente sus intereses, el cual será reembolsado a su vencimiento, con el monto formado por las cantidades de dinero ingresadas al fondo de amortización. Este sistema tiene poca aplicación práctica, por lo que su uso es prácticamente nulo.

Modelo de Tabla para Desarrollar la Amortización de Préstamos por el Sistema Francés y por el Sistema Alemán al final de los problemas de este Capítulo.

PROBLEMAS RESUELTOS CON TABLAS DE AMORTIZACIÓN

Problema 01 Se recibió un préstamo por Bs. 8.000,00 para ser cancelado mediante 12 pagos semestrales, al cual se le aplicó una tasa de interés nominal anual del 14%, con capitalización cuatrimestral. Aplicando el Sistema Francés desarrollar la Tabla de Amortización.

Datos p= 2 n= 6 J_m=14%; m=3 $i_{e=}$ 0,07081 $V_{(p/m)}$= 0,933872 A= 8.000,00

X	R_p	Ix	T_X	A_X	Z_X	I_{AA}
0				8000,00		
1	1011,57	566,48	445,09	7554,91	445,09	566,48
2	1011,57	534,96	476,61	7078,30	921,70	1101,44
3	1011,57	501,21	510,36	6567,95	1432,05	1602,66
4	1011,57	465,08	546,49	6021,45	1978,55	2067,73
5	1011,57	426,38	585,19	5436,26	2563,74	2494,11
6	1011,57	384,94	626,63	4809,64	3190,36	2879,06
7	1011,57	340,57	671,00	4138,64	3861,36	3219,63
8	1011,57	293,06	718,51	3420,12	4579,88	3512,68
9	1011,57	242,18	769,39	2650,73	5349,27	3754,86
10	1011,57	187,70	823,87	1826,86	6173,14	3942,56
11	1011,57	129,36	882,21	944,65	7055,35	4071,92
12	1011,57	66,89	944,68	-0,03	8000,03	4138,81
		66,92	944,65	0,00	8000,00	4138,84

<u>Problema 02.-</u> Al desarrollar una Tabla de Amortización por el Sistema Francés, conociendo que se realizarán 10 pagos trimestrales, a una tasa nominal anual del 10% con capitalización cuatrimestral, se obtuvo que la deuda después del cuarto pago quedó en A_4=6.292,34. Se pide calcular: **a)** La cuota trimestral para pagar el interés y la amortización, **b)** Monto del préstamo concedido, **c)** El interés a deducir para la segunda amortización del préstamo (I_2), **d)** El pago para la sexta amortización del préstamo (T_6), **e)** Saldo o deuda luego del octavo pago del préstamo (A_8) y **f)** Cantidad de dinero pagado luego de la tercera cancelación con cargo al préstamo (Z_3)

Solución

Datos:

$$A_4 = 6.292,34;\ \ p = 4;\ \ n = 2,5\, años;\ \ J_m = 10\%;\ \ m = 3$$

Fórmulas:

$$\begin{cases} I_X = R_p\left[1-(1+i_e)^{-(np-x+1)}\right];\ \ T_X = R_p(1+i_e)^{-(np-x+1)};\ \ A_x = R_p\left[\dfrac{1-(1+i_e)^{-(np-x)}}{i_e}\right], \\ Z_X = R_p\left[(1+i_e)^{-(np-x)}\right]\left[\dfrac{1-(1+i_e)^{-x}}{i_e}\right];\ \ i_e = \left(1+\dfrac{J_m}{m}\right)^{m/p} - 1 \end{cases}$$

Desarrollo:

$$i_{e\left(J_m=10\%;\, p=4;\, m=3\right)} = 0,024897.$$

$$a)\ \ R_p = \frac{i_e \times A_4}{1-(1+i_e)^{-(np-4)}} = \frac{0,024897 \times 6.292,34}{1-1,024897^{-(10-4)}} \Rightarrow \boxed{R_p = 1.141,98}$$

$$b)\ \ A_0 = \frac{1-(1+i_e)^{-(np-0)}}{i_e} = \frac{1.141,98 \times \left(1-1,024897^{-(10-0)}\right)}{0,024897} \Rightarrow \boxed{A_0 = 10.000,00}$$

$$c)\ \ I_2 = R_p\left[1-(1+i_e)^{-(np-2+1)}\right] = 1.141,98 \times \left(1-1,024897^{-(10-2+1)}\right) \Rightarrow \boxed{I_2 = 226,74}$$

$$d)\ \ T_6 = R_p(1+i_e)^{-(np-6+1)} = 1.141,98 \times 1,024897^{-(10-6+1)} \Rightarrow \boxed{T_6 = 1.009,85}$$

$$e)\ \ A_8 = R_p\left[\frac{1-(1+i_e)^{-(np-8)}}{i_e}\right] = \frac{1.141,98 \times \left(1-1,024897^{-(10-8)}\right)}{0,024897} \Rightarrow \boxed{A_8 = 2.201,41}$$

$$f)\ \ Z_3 = R_p\left[(1+i_e)^{-(np-3)}\right]\left[\frac{1-(1+i_e)^{-3}}{i_e}\right] = \frac{1.141,98 \times \left(1,024897^{-(10-3)}\right)\left(1-1,024897^{-3}\right)}{0,024897} \Rightarrow \boxed{Z_3 = 2.746,28}$$

MATERIAL DE APOYO

Período (x)	Pago de Intereses y deuda (R/p)	Intereses sobre saldo de la deuda (I_x)	Abono a la deuda (T_x)	Saldo de la deuda (A_x)	Deuda amortizada (Z_x)	Intereses acumulados pagados (I_a)
00				10.000,00		
01	1.141,98					
02	1.141,98	226,74				
03	1.141,98				2.746,28	
04	1.141,98			6.292,34		
05	1.141,98					
06	1.141,98		1.009,85			
07	1.141,98					
08	1.141,98			2.201,45		
09	1.141,98					
10	1.141,98					

Problemas propuestos de Amortización de Préstamos

Problema 01.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* ***Monto del Préstamo****: 5.000,00.* ***Plazo para el pago:*** *3 años.* ***Tasa de Interés:****10% nominal anual* ***Período de Capitalización:*** *Semestral (m=2).* ***Número de Cuotas a pagar:*** *Pagos Semestrales (p=2)* ***Sistema de Amortización de Préstamos:*** *El Sistema Francés*

Problema 02.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* ***Monto del Préstamo****: 6.000,00.* ***Plazo para el pago:*** *2 años.* ***Tasa de Interés:****8% nominal anual* ***Período de Capitalización:*** *Trimestral(m=4).* ***Número de Cuotas a pagar:*** *Pagos semestrales(p=2)****Sistema de Amortización de Préstamos:*** *El Sistema Francés*

Problema 03.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* ***Monto del Préstamo****: 8.000,00.* ***Plazo para el pago:*** *2 años.* ***Tasa de Interés:*** *9% nominal anual* ***Período de Capitalización:*** *Cuatrimestral (m=3).* ***Número de Cuotas a pagar:*** *Pago trimestral (p=4)* ***Sistema de Amortización de Préstamos:*** *El Sistema Francés*

Problema 04.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* ***Monto del Préstamo****: 4.000,00.* ***Plazo para el pago:*** *1 año.* ***Tasa de Interés:*** *9% nominal anual*

Período de Capitalización: *trimestral(m=4).* ***Número de Cuotas a pagar:*** *Pago Bimestral(p=6)****Sistema de Amortización de Préstamos:*** *El Sistema Francés*

Problema 05.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* ***Monto del Préstamo****: 2.400,00.* ***Plazo para el pago:*** *18 meses .* ***Tasa de Interés:*** *12% nominal anual* ***Período de Capitalización:*** *Mensual (m=12).* ***Número de Cuotas a pagar:*** *Pago anual (p=1)* ***Sistema de Amortización de Préstamos:*** *El Sistema Francés*

Problema 06.- *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* ***La tasa de interés nominal anual con capitalización cuatrimestral*** *= 12% y b)* ***Cuotas de pagos*** *= 5 pagos cuatrimestrales.* ***Sistema Francés***

Tabla de Amortización

Período (x)	Cuota o Renta para Pagar (R/p)	Interés S/Saldo (I_x)	Abono a Deuda (T_x)	Saldo o Deuda Pendiente (A_x)	Deuda Pagada A la Fecha (Z_x)	Intereses Acumulados (I_a)
00						
01						
02						
03			1304,52			
04						
05						

Problema 07.- *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* ***La tasa de interés nominal anual con capitalización cuatrimestral*** *= 12% y b)* ***Cuotas de pagos*** *= 6 pagos semestrales.* ***Sistema Francés***

Tabla de Amortización

Período (x)	Cuota o Renta para Pagar (R/p)	Interés S/Saldo (I_x)	Abono a Deuda (T_x)	Saldo o Deuda Pendiente (A_x)	Deuda Pagada A la Fecha (Z_x)	Intereses Acumulados (I_a)

00						
01						
02						
03						
04						
05		402,67				
06						

Problema 08.- *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* ***La tasa de interés efectiva anual*** = *12% y b)* ***Cuotas de pagos*** = *10 pagos anuales.* ***Sistema Francés***

Tabla de Amortización

Períod (x)	***Cuota o Rent para Pagar (R/p)***	***Interés S/Saldo (I_x)***	***Abono a Deuda (T_x)***	***Saldo o Deud Pendiente (A_x)***	***Deuda Pagad A la Fecha (Z_x)***	***Intereses Acumulados (I_a)***
00						
01						
02						
03						
04				36.382,73		
05						
06						
07						
08						
09						
10						

Problema 09.- *Obtener los valores que el final se solicitan provenientes de la respectiva Tabla de Amortización, sabiendo que el saldo luego de realizado el segundo pago es de Bs.8.346,67; siendo las condiciones del préstamo las siguientes: a)* ***La tasa de interés efectiva anual*** = *15% y b)* ***Cuotas de pagos*** = *6 pagos anuales.* ***Sistema Francés.***

Valores solicitados: *a) La renta fija para cancelar el monto del préstamo aprobado y los intereses del mismo, b) El monto del préstamo aprobado, c) El interés a cancelar dentro del primer pago, d) El monto del tercer abono al pago del préstamo, e) El saldo o deuda pendiente luego de realizado el cuarto pago y f) Monto total de la deuda cancelada luego del segundo pago.*

Problema 10.- *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* ***La tasa de interés efectiva anual con capitalización trimestral*** = *10% y b)* ***Cuotas de pagos*** = *6 pagos trimestrales.* ***Sistema Francés***

Tabla de Amortización

Períod(x)	***Cuota o Rent para Pagar (R/p)***	***Interés S/Saldo (I_x)***	***Abono a Deuda (T_x)***	***Saldo o Deud Pendiente (A_x)***	***Deuda Pagad A la Fecha (Z_x)***	***Intereses Acumulados (I_a)***
00	*1.633,95*					
01						
02						
03						
04						
05						
06						

Problema 11.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* **Monto del Préstamo***: 6.000,00.* **Plazo para el pago:** *2 años.* **Tasa de Interés:***8% nominal anual* **Período de Capitalización:** *Trimestral(m=4).* **Número de Cuotas a pagar:** *Pagos Semestrales (p=2)***Sistema de Amortización de Préstamos:** *El Sistema Francés y Alemán*

Problema 12.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* **Monto del Préstamo***: 8.000,00.* **Plazo para el pago:** *2 años.* **Tasa de Interés:** *9% nominal anual* **Período de Capitalización:** *Cuatrimestral (m=3).* **Número de Cuotas a pagar:** *Pago Trimestral (p=4)* **Sistema de Amortización de Préstamos:** *El Sistema Francés y Alemán*

Problema 13.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* **Monto del Préstamo***: 4.000,00.* **Plazo para el pago:** *1 año.* **Tasa de Interés:** *9% nominal anual* **Período de Capitalización:** *Semestral (m=2).* **Número de Cuotas a pagar:** *Pago Bimestral (p=6)***Sistema de Amortización de Préstamos:** *El Sistema Francés y Alemán*

Problema 14.- *Desarrollar la tabla de amortización para un préstamo en las condiciones siguientes:* **Monto del Préstamo***: 2.400,00.* **Plazo para el pago:** *8 meses .* **Tasa de Interés:** *12% nominal anual* **Período de Capitalización:** *Semestral (m=2).* **Número de Cuotas a pagar:** *Pago Mensual (p=12)***Sistema de Amortización de Préstamos:** *El Sistema Francés y Alemán*

Problema 15.- *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* **La tasa de interés nominal anual con capitalización trimestral** *= 12% y b)* **Cuotas de pagos** *= 6 pagos trimestrales.* **Sistema Alemán**

Tabla de Amortización

(X_i) **Período**	**Deuda comenzando el período (D_x)** $: D_x = D_0 - (x-1)t_c$	**Anualidad variable disponible (R_x)** $R_x = t_c + I_x$	**Amortiz. Período (t_c)** $t_c = D_o / p$	**Intereses en el período (I_x)** $I_x = (D_o - (x-1)t_c)\, i$	**Deuda amortda. fin periodo (z_x)** $Z_x = x t_c$	**Deuda Pendiente Final período (A_x)** $A_x = D_x - t_c$.
00						
01						
02						
03					**1.200**	
04						

05						
06						
Totales						

<u>Problema 16.-</u> *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* ***La tasa de interés nominal anual con capitalización trimestral*** *= 8% y b)* ***Cuotas de pagos*** *= 8 pagos semestrales.* ***Sistema Alemán***

Tabla de Amortización

(X_i) ***Período***	***Deuda comenzando el período (D_x)*** *:* $D_x = D_0 - (x-1)t_c$	***Anualidad variable disponible (R_x)*** $R_x = t_c + I_x$	***Amortiz. Período (t_c)*** $t_c = D_o / p$	***Intereses en el período (I_x)*** $I_x = (D_0 - (x-1)t_c)\ i$	***Deuda amortda. fin periodo (z_x)*** $Z_x = xt_c$	***Deuda Pendiente Final períod (A_x)*** $A_x = D_x - t_c$.
00						
01						
02			***500***			
03						
04						
05						
06						
07						

08						
Totales						

<u>Problema 17-</u> *Obtener los valores en las celdas sombreadas de la Tabla de Amortización anexa con el dato incorporado a ella, si se sabe que: a)* ***La tasa de interés nominal anual con capitalización semestral*** = *15% y b)* ***Cuotas de pagos*** = *10 pagos trimestrales.* ***Sistema Alemán***

Tabla de Amortización

(X_i) ***Período***	***Deuda comenzando el período (D_x) : $D_x = D_0 - (x-1)t_c$***	***Anualidad variable disponible (R_x) $R_x = t_c + I_x$***	***Amortiz. Período (t_c) $t_c = D_o / p$***	***Intereses en el período (I_x) $I_x = (D_o - (x-1)t_c)\ i$***	***Deuda amortda. fin periodo (z_x) $Z_x = xt_c$***	***Deuda Pendiente Final período (A_x) $A_x = D_x - t_c$.***
00	***10.000***					
01						
02						
03						
04						
05						
06						

07						
08						
09						
10						
Totales						

Modelo de tabla para aplicar el Método Francés a las amortizaciones de deudas
Contrato de Préstamo

Período (x)	***Cuota o Renta para pagar (R/p)***	***Interés S/Saldo (I_x)***	***Abono a deuda (T_x)***	***Saldo o Deuda pendiente (A_x)***	***Deuda Pagada a la Fecha (Z_x)***	***Intereses acumulados (I_a)***
00						
01						
02						
03						
04						
05						
06						
07						
08						

09						
10						
11						
12						
Totales						

Modelo de tabla para aplicar el Método Alemán las amortizaciones de deudas Contrato de Préstamo

(X_i) **Período**	***Deuda comenzando el período*** (D_x) : $D_x=D_0-(x-1)t_c$	***Anualidad variable disponible*** (R_x) $R_x = t_c + I_x$	***Amortiz. Período*** (t_c) $t_c = D_o / p$	***Intereses en el período*** (I_x) $I_x=(D_o-(x-1)t_c)\ i$	***Deuda amortda. fin periodo*** (z_x) $Z_x = xt_c$	***Deuda Pendiente Final períod*** (A_x) $A_x = D_x - t_c$.
00						
01						
02						
03						
04						
05						
06						
07						
08						
09						
10						
11						
12						
Totales						

Capítulo VII

Proyectos de Inversión

1.- Valor Capital Neto (VCN).- Conocido también como Valor Presente Neto (VPN), estará representado por los flujos netos de caja positivo que se espera recibir y el valor actual de los flujos de caja negativos, también previstos, valuados en base a una determinada tasa de rendimiento. Por lo general es la tasa de oportunidad de la empresa dependiendo del tipo de inversión a realizarse.

Términos a utilizar.-

-A; el valor actual, en la época cero, de todos los flujos de caja negativos de una inversión.

F_i; los flujos netos de cajas positivos.

i; la tasa de rendimiento anual.

El valor capital neto (VCN) será:

$$\mathbf{VCN = - A + F_1 (1 + i)^{-1} + F_2 (1 + i)^{-2} + \ldots + Fn (1 + i)^{-n}}$$

Reglas del Valor Capital Neto: a) Un proyecto se acepta si su VAN es positivo. **b)** Un proyecto se rechaza si su VAN es negativo y **c)** Si se tiene que elegir entre dos proyecto que presenta VAN positivo, se selecciona el de mayor VAN.

2.- Tasa Interna de Retorno (TIR).- La tasa interna de retorno de un proyecto es el tipo de interés para el que se produce la equivalencia entre los flujos de cajas positivos y negativos de un proyecto. Es la tasa que iguala, en los inicios época cero, el valor actual de la inversión con el valor actual de todos los flujos de cajas netos positivos.

Términos a utilizar.-

A_R; valor actual a la tasa R

-A; el valor actual, en la época cero, de todos los flujos de caja negativos de una inversión.

F_i; los flujos netos de cajas positivos.

R; Tasa interna de retorno.

El valor actual a la tasa interna de retorno será:

$$\mathbf{A_R = -A + F_1 (1 + R)^{-1} + F_2 (1 + R)^{-2} + \ldots + F_n (1 + R)^{-n} = 0}$$

Reglas de la Tasa Interna de Retorno: a) Un proyecto se acepta si su TIR es mayor al costo del capital, la rentabilidad exigida. **b)** Un proyecto se rechaza si su TIR es menor al costo del capital y **c)** Si se tiene que elegir entre dos proyecto, se selecciona al que tiene mayor TIR.

Problema resuelto sobre proyectos de inversión

Problema 01.- En el cuadro anexo, donde se presentan cuatro proyectos para la inversión, se solicita priorizar y recomendar de acuerdo a la TIR.

Proyectos de inversión	Flujo de caja Negativo Época cero	Flujos de caja netos positivos			Total flujos Caja netos positivo
		F_1 Tiempo 1	F_2 Tiempo 2	F_3 Tiempo 3	
A	9.000,00	4.000,00	4.000,00	5.000,00	4.000,00
B	8.000,00	3.000,00	5.000,00	2.000,00	2.000,00
C	6.000,00	3.000,00	2.000,00	3.000,00	2.000,00
D	6.000,00	2.000,00	4.000,00	3.000,00	3.000,00

Si la tasa de oportunidad para la empresa es del 18% anual y a este cuadro le aplicamos el método del VCN: a) Priorizar de acuerdo a este método y b) Comparar con los resultados

obtenidos aplicando el método de la TIR y comentar resultados comparados, ¿Qué se debe recomendar?

Datos: En la Tabla

Fórmulas:

$$A_R = -A + \frac{F_1}{(1+R)} + \frac{F_2}{(1+R)^2} + ... + \frac{F_n}{(1+R)^n} = 0$$

$$VCN = -A + \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{R_n}{(1+i)^n}$$

Solución

Aplicando Valor Capital Neto

Inversión "A":

$$-9.000+\frac{4.000}{(1+0,18)}+\frac{4.000}{(1+0,18)^2}+\frac{5.000}{(1+0,18)^3}\Rightarrow -9.000+\frac{4.000}{1,18}+\frac{4.000}{1,18^2}+\frac{5.000}{1,18^3}=305.72;$$

Inversión "B":

$$-8.000+\frac{3.000}{(1+0,18)}+\frac{5.000}{(1+0,18)^2}+\frac{2.000}{(1+0,18)^3}\Rightarrow -8.000+\frac{3.000}{1,18}+\frac{5.000}{1,18^2}+\frac{2.000}{1,18^3}=-649,44;$$

Inversión "C":

$$-6.000+\frac{3.000}{(1+0,18)}+\frac{2.000}{(1+0,18)^2}+\frac{3.000}{(1+0,18)^3}\Rightarrow -6.000+\frac{3.000}{1,18}+\frac{2.000}{1,18^2}+\frac{3.000}{1,18^3}=-195,37;$$

Inversión "D":

$$-6.000+\frac{2.000}{(1+0,18)}+\frac{4.000}{(1+0,18)^2}+\frac{3.000}{(1+0,18)^3}\Rightarrow -8.000+\frac{3.000}{1,18}+\frac{5.000}{1,18^2}+\frac{2.000}{1,18^3}=393,55;$$

Aplicando la Tasa Interna de Retorno

Inversión "A":

$$-9.000+\frac{4.000}{(1+R)}+\frac{4.000}{(1+R)^2}+\frac{5.000}{(1+R)^3}=0\Rightarrow -9.000(1+R)^3+4.000(1+R)^2+4.000(1+R)+5.000=0;$$

resolviendo productos notables y ordenando nos queda que : $9.000R^3+23.000R^2+15.000R-4000=0$

simplificando esta ecuación entre 1000 *resulta* : $9R^3+23R^2+15R-4=0;$ *y resolviéndola* $\Rightarrow$ $R=0,2003$

Inversión "B":

$$-8.000+\frac{3.000}{(1+R)}+\frac{5.000}{(1+R)^2}+\frac{2.000}{(1+R)^3}=0\Rightarrow -8.000(1+R)^3+3.000(1+R)^2+5.000(1+R)+2.000=0;$$

resolviendo productos notables y ordenando nos queda que : $8.000R^3+21.000R^2+13.000R-2000=0$

simplificando esta ecuación entre 1000 *resulta* : $8R^3+21R^2+13R-2=0;$ *y resolviéndola* $\Rightarrow$ $R=0,1267$

Inversión "C":

$$-6.000+\frac{3.000}{(1+R)}+\frac{2.000}{(1+R)^2}+\frac{3.000}{(1+R)^3}=0\Rightarrow -6.000(1+R)^3+3.000(1+R)^2+2.000(1+R)+3.000=0;$$

resolviendo productos notables y ordenando nos queda que : $6.000R^3+15.000R^2+10.000R-2000=0$

simplificando esta ecuación entre 1000 *resulta* : $6R^3+15R^2+10R-2=0;$ *y resolviéndola* $\Rightarrow$ $R=0,1594$

Inversión "D":

$$-6.000+\frac{2.000}{(1+R)}+\frac{4.000}{(1+R)^2}+\frac{3.000}{(1+R)^3}=0 \Rightarrow -6.000(1+R)^3+2.000(1+R)^2+4.000(1+R)+3.000=0;$$

$$\textit{resolviendo productos notables y ordenando nos queda que}: \ 6.000R^3+15.000R^2+10.000R-2000=0$$

$$\textit{simplificando esta ecuación entre } 1000 \textit{ resulta}: 6R^3+16R^2+10R-3=0; \textit{ y resolviéndola} \Rightarrow R=0,2179$$

Clasificación de los proyecto según el Método aplicado

Método / Proyectos	VCN		TIR	
	Valor	**Orden**	**Valor**	**Orden**
"A"	**305,72**	**2°**	**20,03%**	**2°**
"B"	**-649,44**	**No se toma**	**12,67%**	**No se toma**
"C"	**-195,37**	**No se toma**	**15,94%**	**No se toma**
"D"	**393,55**	**1°**	**21,79%**	**1°**

"En los dos métodos se puede observar que el Proyecto "D" es el recomendable para invertir. Los Proyectos "B" y "C" se rechazan de plano porque el saldo en el método en del Valor Capital Neto nos da negativo y además en el método de la Tasa Interna de Retorno esa dos tasas están por

Problemas propuestos sobre proyectos de inversión

Problema 01.- *En el cuadro anexo, donde se presentan cuatro proyectos para la inversión, se solicita priorizar y recomendar de acuerdo a la TIR.*

Proyectos de inversión	***Flujo de caja Negativo Época cero***	***Flujos de caja netos positivos***			***Total flujos Caja netos positivo***
		F_1 Tiempo 1	***F_2 Tiempo 2***	***F_3 Tiempo 3***	

A	*11.000,00*	*4.000,00*	*6.000,00*	*5.000,00*	*5.000,00*
B	*8.000,00*	*3.000,00*	*5.000,00*	*2.000,00*	*2.000,00*
C	*7.000,00*	*3.000,00*	*2.000,00*	*3.000,00*	*3.000,00*
D	*6.000,00*	*2.000,00*	*5.000,00*	*3.000,00*	*4.000,00*

Si la tasa de oportunidad para la empresa es del 18% anual y a este cuadro le aplicamos el método del VCN: a) Priorizar de acuerdo a este método y b) Comparar con los resultados obtenidos aplicando el método de la TIR y comentar resultados comparados, ¿Qué se debe recomendar?

Problema 02 .- *En el cuadro anexo, donde se presentan cuatro proyectos para la inversión, se solicita priorizar y recomendar de acuerdo a la TIR.*

Proyectos de inversión	***Flujo de caja Negativo Época cero***	***Flujos de caja netos positivos***			***Total flujos Caja netos positivo***
		F_1 Tiempo 1	***F_2 Tiempo 2***	***F_3 Tiempo 3***	
A	*9.000,00*	*5.000,00*	*4.000,00*	*7.000,00*	*7.000,00*
B	*7.000,00*	*8.000,00*	*6.000,00*	*4.000,00*	*11.000,00*
C	*6.000,00*	*5.000,00*	*3.000,00*	*2.000,00*	*4.000,00*
D	*7.000,00*	*2.000,00*	*4.000,00*	*3.000,00*	*2.000,00*

Si la tasa de oportunidad para la empresa es del 16% anual y a este cuadro le aplicamos el método del VCN: a) Priorizar de acuerdo a este método y b) Comparar con los resultados obtenidos aplicando el método de la TIR y comentar resultados comparados, ¿Qué se debe recomendar?

Problema 03 *.- En el cuadro anexo, donde se presentan cuatro proyectos para la inversión, se solicita priorizar y recomendar de acuerdo a la TIR.*

Proyectos de	***Flujo de caja Negativo***	***Flujos de caja netos positivos***	***Total flujos Caja***

inversión	Época cero	F_1 Tiempo 1	F_2 Tiempo 2	F_3 Tiempo 3	netos positivo
A	2.000,00	1.500,00	2.880,00	2.000,00	4.380,00
B	1.000,00	900,00	1.584,00	2.180,00	3.664,00
C	1.000,00	1.000,00	1.680,00	1858,00	3.538,00
D	1.200,00	1700,00	2.000,00	2500,00	5.000,00

Si la tasa de oportunidad para la empresa es del 20% anual y a este cuadro le aplicamos el método del VCN: a) Priorizar de acuerdo a este método y b) Comparar con los resultados obtenidos aplicando el método de la TIR y comentar resultados comparados, ¿Qué se debe recomendar?

Problema 04 .- *Se nos presenta la oportunidad de comprar una empresa para lo cual solo contamos con Bs 150.000,00. . La empresa está programada para que en los cinco años después de la negociación presente un flujo de caja positivo respondiendo al siguiente cronograma: Bs. 50.000,00; año 1, Bs. 45.000,00; año 2, Bs. 60.000,00 año 3, Bs. 55.000,00; año 4 y Bs. 70.000,00 año 5. ¿Será recomendable realizar el negocio si la tasa de oportunidad de la empresa es del 15%?*

Problema 05 .- *Un ciudadano compró un apartamento en Bs. 500.000,00 y los gastos de escritura y gestorías fueron de Bs. 10.000,00 y espera venderlo dentro de cuatro meses por Bs. 700.000,00. Los ingresos por rentas de alquiler y los egresos por gastos de mantenimiento son los siguientes:*

Mes	**1**	**2**	**3**	**4**
Ingresos	8.000,00	8.000,00	8.000,00	8.000,00
Egresos	500,00	200,00	300,00	1.000,00

Si este ciudadano se estableció para su beneficio una tasa de oportunidad del 6,5% mensual; ¿Será que realizó un buen negocio?

Problema 06 .- *La señora Luz Elena Ruiz Bejarano se retiró de la empresa donde trabajaba y recibió la suma de Bs 750.000,00 por sus prestaciones sociales. El desea invertir su dinero, y se le presentan dos alternativas.*

Alternativa 01.- Una sociedad financiera le ofrece pagarle el 35% anual el deje el dinero colocado durante cinco años, al final de los cuales le entregarán todo el dinero.

Alternativa 02.- Montar una pequeña industria que según un estudio económico le reportará los ingresos anuales siguientes:

Año	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Ingreso neto	*250.000,00*	*375.000,00*	*375.000,00*	*250.000,00*	*187.500,00*

Al final de los cinco años, la señora Ruiz Bejarano, estima recibir Bs. 375.000,00 por concepto de la venta de la maquinaria, y además cree que puede trabajar su dinero y en cualquier momento le produciría un 30% anual. ¿Qué alternativa se le recomendaría a la señora Ruiz Bejarano para que tome su decisión?